METODE PENTRU REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE OPTIMIZARE PE GRAFURI (PE REȚELE DE TRANSPORT)

Dumitru ZAMBIȚCHI
Academia de Studii Economice din Republica Moldova
email: zambitchidumitru@yahoo.com

Rezumat. *În lucrare se examinează unele probleme extremale pe grafuri (pe rețele de transport) și se propun algoritmi pentru soluționarea lor.*

În practică se întâlnesc probleme în care este necesar de a determina locul de amplasare a punctelor de prestare a unor servicii pe rețele de transport. Pentru a rezolva aceste probleme este necesar, în primul rând, să determinăm drumurile de cost minim între orice perechi de vârfuri ale grafului, drumurilor cu speranță maximă și drumurilor cu capacitate maximă.

Fie dat un graf orientat $G=(V,U)$, unde $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ - mulțimea vârfurilor, iar $U=\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ - mulțimea arcelor. Dacă un arc $u \in U$ este determinat de perechea de vârfuri (v_r, v_s), atunci se scrie $u=(v_r, v_s)$ și se spune că vârful v_r este extremitate inițială a arcului, iar v_s extremitatea finală a arcului.

Un drum al unui graf orientat $G=(V, U)$ se definește ca un șir de vârfuri notat: $D=\{v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{q-1}}, v_{i_q}\}$ cu proprietatea că $(v_{i_0}, v_{i_1}), (v_{i_1}, v_{i_2}), \dots, (v_{i_{q-1}}, v_{i_q})$ sunt arce ale grafului. Vârfurile v_{i_0} și v_{i_q} sunt extremitățile drumului *D*.

I. Problema determinării drumurilor de cost minim

Fie dat un graf orientat $G=(V,U)$. Fiecărui arc $u=(v_r, v_s)$ i se atribuie costul (lungimea) $l(u)=l(v_r, v_s)>0$. Prin costul (lungimea) drumului se înțelege suma costurilor arcelor care îl formează.

Se pune problema determinării drumurilor de cost minim între toate perechile de vârfuri ale grafului.

Pentru aceasta poate fi utilizat următorul algoritm (algoritmul Floyd):

1. Formăm matricea inițială $C_0=(c_{ij})_{n\times n}$, unde

$$c_{ij}=\begin{cases} 0, \text{ pentru } i=j; \\ l(v_i, v_j), \text{ dacă în G există arcul } (v_i, v_j),\ i\neq j; \\ M_0, \text{ dacă în G nu există arcul } (v_i, v_j), \text{ unde } M_0=10^6. \end{cases}$$

2. Luăm $k=1$.

3. Pentru toți $i, j \neq k$ calculăm valorile noi $c'_{ij}=\min\{c_{ij},\ c_{ik}+c_{kj}\}$.

4. $k:=k+1$.

5. Dacă $k \le n$, atunci trecem la punctul 3, în caz contrar la punctul 6.

6. Elementele matricei obținute C_n ne indică costul (lungimea) drumului minim dintre toate perechile de vârfuri ale grafului.

7. Sfârșit.

Deoarece la fiecare iterație a algoritmului trebuie de efectuat n^2 comparații, rezultă că eficacitatea algoritmului este de ordinal n^3 operații. Având matricea C_n putem determina însăși drumurile de cost minim între orice perechi de vârfuri ale grafului (ale rețelei de transport).

II. Problema determinării drumurilor cu speranță maximă

În problema determinării drumurilor de cost minim prin costul drumului se înțelegea suma costurilor arcelor care îl formează.

Fie acuma că fiecărui arc $u=(v_r, v_s)$ al grafului *G* i se mai atribuie un număr $\rho=(v_r, v_s)$, care reprezintă probabilitatea că sectorul dat (v_r, v_s) al rețelei de transport se va afla într-o stare bună.

Speranța drumului *D* se va determina prin formula

$$\rho(D)=\prod_{(v_i, v_j)\in D}\rho(v_i, v_j).$$

Se pune problema determinării drumurilor cu speranța maximă [1] între toate perechile de vârfuri ale grafului. Pentru a rezolva această problemă poate fi aplicat algoritmul lui Floyd cu unele modificări:

1. Formăm matricea inițială $C_0 = \left(c_{ij}\right)_{n x n}$, unde

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{pentru } i = j; \\ \rho\left(v_i, v_j\right), \text{ dacă în G există arcul } \left(v_i, v_j\right), i \neq j; \\ 0, \text{dacă în graful G nu există arcul } \left(v_i, v_j\right). \end{cases}$$

2. Luăm $k = 1$.

3. Pentru toți $i, j \neq k$ calculăm valorile noi $c'_{ij} = \max\left\{c_{ij}, c_{ik} \cdot c_{kj}\right\}$.

4. $k := k + 1$.

5. Dacă $k \leq n$, atunci trecem la punctul 3, în caz contrar la punctul 6.

6. Elementele matricei obținute C_n ne indică speranța maximă a drumurilor dintre toate perechile de vârfuri ale grafului.

7. Sfârșit.

III. Problema determinării drumurilor cu capacitatea maximă

În această problemă fiecărui arc $u = \left(v_r, v_s\right)$ al grafului G i se atribuie capacitatea de transfer $q\left(v_r, v_s\right) > 0$. Capacitatea de transfer a drumului D se determină prin formula

$$Q(D) = \min_{\left(v_i, v_j\right) \in D} \left\{q\left(v_i, v_j\right)\right\}.$$

Se pune problema determinării drumurilor cu capacitatea de transfer maximă [1] între toate perechile de vârfuri ale grafului. Pentru a rezolva această problemă poate fi aplicat algoritmul lui Floyd cu următoarele modificări:

1. Formăm matricea inițială $C_0 = \left(c_{ij}\right)_{n x n}$, unde

$$c_{ij} = \begin{cases} M_0, \text{pentru } i = j, \text{ unde} M_0 = 10^6; \\ q\left(v_i, v_j\right), \text{dacă în G există arcul } \left(v_i, v_j\right), i \neq j; \\ 0, \text{dacă în graful G nu există arcul } \left(v_i, v_j\right). \end{cases}$$

2. Luăm $k = 1$.

3. Pentru toți $i, j \neq k$ calculăm valorile noi $c'_{ij} = \max\left\{c_{ij}, \min\left\{c_{ik}, c_{kj}\right\}\right\}$.

4. $k := k + 1$.

5. Dacă $k \leq n$, atunci trecem la punctul 3, în caz contrar la punctul 6.

6. Elementele matricei obținute C_n ne indică capacitatea maximă a drumurilor dintre toate perechile de vârfuri ale grafului G.

7. Sfârșit.

În continuare, vom examina problema centrului și problema medianei pe grafuri [2]. Fiecărui vârf $v_j \in V$ se pune în corespondență un număr (frecvența) $p_j = p\left(v_j\right) > 0$.

Problema centrului. Problema centrului pe grafuri constă în determinarea vârfului $v^*_{i_1}$, pentru care are loc:

$$F_1\left(v^*_{i_1}\right) = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq n} \left[p\left(v_j\right) \cdot d\left(v_i, v_j\right)\right],$$

unde $d\left(v_i, v_j\right)$ este distanța minimă de la vârful v_i la vârful v_j. Pentru a determina centrul (vârful $v^*_{i_1}$) este necesar să determinăm matricea distanțelor minime $D^* = \left(d\left(v_i, v_j\right)\right)_{n \times n}$. Înmulțind elementele fiecărei coloane a matricei D^* cu frecvența respectivă $p\left(v_j\right)$, obținem matricea ponderată $D^*_p = \left(p\left(v_j\right) \cdot d\left(v_i, v_j\right)\right)_{n \times n}$. În fiecare linie a matricei D^*_p determinăm elemental maximal. Linia matricei D^*_p cu elemental maximal de valoare minimă și ne indică vârful $v^*_{i_1}$ (centrul grafului G).

În multe probleme practice este necesar de a determina locul de amplasare pe rețeaua de transport a producătorului (depozitului) astfel ca cheltuielile de transport legate de satisfacerea cerințelor consumatorilor să fie minime.

Problema medianei. Problema medianei pe grafuri constă în determinarea vârfului $v^*_{i_2}$, pentru care are loc:

$$F_2\left(v^*_{i_2}\right) = \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} p\left(v_j\right) \cdot d\left(v_i, v_j\right).$$

Pentru a determina mediana grafului (vârful $v^*_{i_2}$) este necesar să determinăm matricea distanțelor minime D^*. Înmulțind elementele fiecărei coloane a matricei D^* cu frecvența respectivă $p\left(v_j\right)$, obținem matricea ponderată D^*_p. Pe fiecare linie a matricei ponderate D^*_p determinăm suma elementelor. Linia cu suma elementelor de valoare minimă și ne determină mediana grafului (vârful $v^*_{i_2}$).

Problema Weber. O problemă generală în comparație cu problema medianei este problema Weber pe grafuri [3]. În această problemă este nevoie de amplasat mai mulți producători (depozite), fiecare din ei asigurând consumatorii cu un anumit tip de produs. În acest caz este necesar de a minimize suma distanţelor ponderate atât între vârfurile unde vor fi amplasaţi producătorii cât şi între aceste vârfuri şi vârfurile unde sunt deja amplasaţi consumatorii cu cererile respective.

A fost elaborat un algoritm efectiv [3] pentru soluţionarea problemei Weber în cazul când graful este un arbore (un graf conex, neorientat şi fără cicluri).

În practică se întâlnesc probleme extremale pe reţele de transport, când este necesar să luăm în consideraţie speranţa maximă a drumurilor sau capacitatea maximă a drumurilor [2].

BIBLIOGRAFIE

1. N. Christofides. Graph Theory. An algoritmic approach. Academic press. New York, London, San Francisco, 1975.

2. E. Minieкa. Optimization Algorithms for Networks and Graphs. New York, 1978.

3. D. Zambiţchi. Problema Weber în spaţiul metric R_1^n şi pe reţele de transport. Analele ATIC. Chişinău, 2009.