LIBERTAS MATHEMATICA vol XXIV (2004)

Caractérisation des $*_\nu$ -produits et des $*_\nu$ -produits faibles

My Hachem Lalaoui Rhali

Abstract. The aim of this paper is to bring a characterization of weak $*_\nu$-product and Vey-$*_\nu$-product, and to give a necessary and sufficiently condition for which a weak $*_\nu$,-product would be a $*_\nu$ - product. Finally we show that every Vey weak $*_\nu$-product can be uniquely written as a product of a Vey $*_\nu$-product by a constant.

Resume. Dans ce travail, on donne une caractérisation des $*_\nu$ -produits faibles et une condition nécessaire et suffisante pour qu'un $*_\nu$ -produit faible soit un $*_\nu$-produit. Enfin on montre que tout $*_\nu$-produit faible de Vey s'écrit de façon unique comme produit d'un $*_\nu$-produit de Vey par une constante.

1991 Mathematics Subject Classification: 81S10, 58F06.
Keywords: Star-produits, déformation, cohomologie.

1 Introduction

La mécanique classique se fonde sur la structure de variété symplectique dans l'espace des phases muni de la 2-forme $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$, éxprimée en coordonnnées locales impulsion-position $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$. Le crochet $\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i})$ définit sur $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ une structure d'algèbre de Poisson de dimension infinie. En mécanique quantique on remplace les variables dynamiques p_i, q_i par les opérateurs $\hat{p_i}, \hat{q_i}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H} \subset L^2(M)$ constitué de fonctions d'onde $\psi(a_1, a_2, ..., a_n, t)$ où M est l'espace de configuration. J.Moyal [7] avait étudié la correspondance entre le commutateur des opérateurs et le crochet de Poisson. Plus précisément il avait prouvé que le commutateur des opérateurs ne correspond pas au crochet de Poisson mais à une série en la constante de Planck dont le premier terme est ce crochet. Ainsi est née l'idée de formuler la mécanique quantique en substituant au crochet de Poisson des déformations formelles appropriées à savoir les $*_\nu$ -produits et les $*_\nu$ -produits de Vey. Pour les applications des $*_\nu$ -produits aux groupes de Lie le lecteur est invité à consulter [5]. Dans ce papier, on caractérise les $*_\nu$ -produits et les $*_\nu$ -produits faibles et on montre que, étant donné un $*_\nu$ -produit faible de Vey, il existe un unique $*_\nu$ -produit de Vey qui s'en déduit par produit par une constante.

2 $*_\nu$-produits et $*_\nu$-produits faibles

Soit W une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension paire $2n$ et de classe C^∞. Tous les éléments introduits sont supposés C^∞, et pour abréger on pose $N = C^\infty(W, \mathbb{R})$.

Une structure *symplectique* est définie sur W par une 2-forme fermée F (i.e $dF = 0$) partout de rang $2n$. Elle peut être aussi définie par un 2-tenseur (contravariant anti-symétrique) $\Lambda = \mu^{-1}(F)$ où $\mu : TW \longrightarrow T^*W$ est l'isomorphisme de fibrés vectoriels donné par $\mu(X) = -i(X)F$, vérifiant $[\Lambda, \Lambda] = 0$ au sens du crochet de Schouten [1]. Nous sommes conduits à introduire Le crochet de *Poisson* $P(u,v) = i(\Lambda)(du, dv) = \mathcal{L}(X_u)v \; \forall u, v \in N$, où $i(.)$ désigne le produit intérieur.

L'espace N est naturellement muni de deux structures algébriques: une structure d'algèbre associative (en outre commutative) donnée par le crochet usuel des fonctions et une structure d'algèbre de Lie donnée par le crochet de Poisson.

Notons par $E(N, \nu)$ l'espace des séries formelles en ν à coéfficients dans N. *Une déformation* différentielle formelle de l'algèbre associative $(N, .)$ est une application bilinéaire $N \times N \to E(N, \nu)$ décrite par la série formelle:

$$u *_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r(u,v) = uv + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C_r(u,v) \tag{1}$$

qui vérifie formellement l'identité d'associativité $(u *_\nu v) *_\nu w = u *_\nu (v *_\nu w)$, $\forall u, v, w \in N$, où les $C_r (r \geq 1)$ sont des applications bilinéaires différentiables de $N \times N \longrightarrow N$; ν est appelé le paramètre de déformation. (1) définit sur $E(N, \nu)$ une structure d'algèbre associative dite algèbre associative formelle obtenue par déformation.

De même une *déformation* différentielle d'algèbre de Lie de Poisson (N, P) est donnée par une application bilinéaire alternée $N \times N \to E(N, \lambda)$, soit

$$[u,v]_\lambda = P(u,v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C_{2r+1}(u,v) \tag{2}$$

qui vérifie formellement l'identité de Jacobi. Les C_{2r+1} sont des applications bilinéaires alternées de $N \times N \to N$. (2) définit sur $E(N, \lambda)$ une structure d'algèbre de Lie dite algèbre de Lie formelle obtenue par déformation de l'algèbre de Lie de Poisson.

Dans toute la suite on suppose que $C_1 = P$ où P est le crochet de Poisson sur W. Notons par (H_1) et (H_2) les hypothèses suivantes:

(H_1): C_r est paire en u, v pour r pair, impaire en u, v pour r impair;

(H_2): les C_r sont nulles sur les constantes.

Définition 2.1. *1) Si les C_r vérifent (H_1) et (H_2), on dit que (1) définit un $*_\nu$ -produit sur (W, F).*

2) On appelle $*_\nu$ -produit faible, toute déformation associative de la forme

$$u *_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r(u,v) = uv + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C_r(u,v)$$

où les 2 -cochaines différentielles C_r satisfont (H_1) et où celles de rang impair sont nulles sur les constantes.

3) Une p- cochaine de (N,P) est une application p -linéaire de $N^p \to N$. Le cobord de Chevalley d'une p- cochaine C de (N,P) est la $(p+1)$-cochaine $\partial_c C$ donnée par

$$\partial_c C(u_0,u_1,\ldots,u_p) = \epsilon_{0,\cdots,p}^{\lambda_1,\cdots,\lambda_p}\left(\frac{1}{p!}\left\{u_{\lambda_0}, C\left(u_{\lambda_1},\ldots,u_{\lambda_p}\right)\right\} + \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2(p-1)!} C\left(\{u_{\lambda_0},u_{\lambda_1}\} u_{\lambda_2},\ldots,u_{\lambda_p}\right)\right)$$

où $u_\lambda \in N$ et où ϵ est l'indicateur antisymétrique de Kronecker.

Remarque 2.1. Un star-produit (1) donne naissance par antisymétrisation à une algèbre de Lie formelle (2) tel que pour $\lambda = \nu^2$ on ait:

$$[u,v]_\lambda = (2\nu)^{-1}(u*v - v*u)$$

Définition 2.2. *Deux $*_\nu$ -produits $u *_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r(u,v)$ et $u *_\nu' v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r'(u,v)$ sont dits équivalents s'il existe un opérateur $T_\nu = Id + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s T_s$, où les T_s sont des endomorphismes de N nuls sur les constantes, tel que*

$$T_\nu(u *_\nu' v) = T_\nu u *_\nu T_\nu v \tag{3}$$

T_ν est appelé opérateur d'équivalence transformant $*_\nu$ en $*_\nu'$. Dans le cas où les T_s ne sont pas nuls sur les constantes, on dit que les deux $*_\nu$-produits $*_\nu$ et $*_\nu'$ sont faiblement équivalents.
De même deux déformations d'algèbres de Lie formelles $[,]_\lambda$ et $[,]_\lambda'$ sont équivalents s'il existe $T_\lambda = Id + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s T_s$ où les T_s sont des opérateurs différentiels nuls sur les constantes, tel que

$$T_\lambda[u,v]_\lambda' = [T_\lambda u, T_\lambda v]_\lambda \tag{4}$$

Pour les T_s non nuls sur les constantes, nous traduisons (4) en disant qu'il y a équivalence faible.

Lemme 2.1. *Deux applications bilinéaires alternées données de $N \times N \to E(N,\lambda)$ données par*

$$[u,v]_\lambda = P(u,v) + \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r B_r(u,v) \tag{5}$$

et

$$[u,v]_\lambda' = P(u,v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r B_r'(u,v) \tag{6}$$

telles que $B_r' - B_r = \partial_c A_r$, $r = 1,2,\ldots$, où A_r est un opérateur différentiel, sont faiblement équivalentes.
Preuve. Quitte à faire une transformation par un opérateur d'équivalence faible, on peut supposer que $B_r' = B_r$ $(r = 1,2,\ldots,q-1)$.

Montrons alors qu'il existe un opérateur d'équivalence faible transformant $B_q^{'}$ en B_q. Pour cela soit $T_\lambda = Id_N + \lambda^q A_q$. Soit $[\,,]_\lambda^{''}$ déduit de $[\,,]_\lambda$ par T_λ; alors la relation

$$T_\lambda[u,v]*_\lambda^{''} = [T_\lambda u, T_\lambda v]_\lambda$$

se traduit par

$$B''_q - B_q + G_q = \partial_C T_q = \partial_C A_q \quad \text{(voir [5])}$$

avec

$$G_q(u,v) = \sum_{r+s=q} T_s B_q^{''}(u,v) - \sum_{s+s^{'}=q} T_s u T_{s^{'}} v - \sum_{r+s=q} (B_r(T_s u,v) + B_r(u,T_s v)) +$$
$$+ \sum_{r+s+s^{'}=q} B_r(T_s u, T_{s^{'}} v)$$

pour

$$r,s,s^{'} \geq 1 \quad \text{et} \quad T_\lambda = Id + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s T_s$$

avec $T_0 = Id$, $T_q = A_q$ et $T_s = 0\,\forall s \geq 1$ et $s \neq q$. Il est facile de voir que $G_q \equiv 0$, et donc

$$B_q^{''} - B_q = \partial_c A_q = B_q^{'} - B_q$$

c'est à dire que

$$B_q^{''} = B_q^{'}$$

Ainsi les deux applications bilinéaires $[\,,]_\lambda$ et $[\,,]_\lambda^{'}$ sont faiblement -équivalentes.

Proposition 2.1. *Deux déformations formelles d'algèbre de Lie*

$$[u,v]_\lambda = P(u,v) + \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r C_{2r+1}(u,v) \tag{7}$$

et

$$[u,v]_\lambda^{'} = P(u,v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C_{2r+1}^{'}(u,v) \tag{8}$$

telles que $C_{2r+1}^{'} - C_{2r+1} = \partial_C A_r$, *où* A_r *est un opérateur différentiel, sont faiblement équivalentes.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le Lemme précédent aux applications bilinéaires altérnées $[u,v]_\lambda = P(u,v) + \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r B_r(u,v)$ et $[u,v]_\lambda^{'} = P(u,v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r B_r^{'}(u,v)$, en posant $B_r = C_{2r+1}$ et $B_r^{'} = C_{2r+1}^{'}$, pour $r = 1,2,\ldots$.

Proposition 2.2. *Pour qu'un* $*_\nu$ *-produit faible* $*_\nu$ *soit un* $*_\nu$ *-produit il faut et il suffit qu'il soit équivalent à un* $*_\nu$ *-produit* $*_\nu^{'}$ *et que l'application*

$$u \in N \to \sum_{2r+s=2t} C_{2r}(u, T_s.)$$

soit nulle sur les constantes, où $T_\nu = I_d + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s T_s$ *est l'opérateur d'équivalence transformant* $*_\nu^{'}$ *en* $*_\nu$.

Preuve. Supposons que le $*_\nu$ -produit faible $*_\nu$ est équivalent à un $*_\nu$ -produit $*'_\nu$, et soit $T_\nu = Id + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s T_s$ l'opérateur d'équivalence transformant $*_\nu$ en $*'_\nu$. Alors l'égalité

$$T_\nu(u *'_\nu v) = T_\nu u *_\nu T_\nu v$$

se traduit par

$$C'_t - C_t + G_t = \partial_H T_t \quad (t = 1, 2, \dots) \quad \text{(voir [1])}$$

où $G_1(u, v) = 0$ et

$$G_t(u,v) = \sum_{r+s=t} T_s C'_r(u,v) - \sum_{s+s'=t} T_s u T_{s'} v - \sum_{r+s=t} (C_r(T_s u, v) + C_r(u, T_s v)) +$$
$$+ \sum_{r+s+s'=t} C_r(T_s u, T_{s'} v)$$

T_ν étant un opérateur d'équivalence, donc les T_s , $(s \geq 1)$ sont nulles sur les constantes (voir [5] p. 164). De plus, par définition d'un $*_\nu$-produit faible, les C_{2t+1} sont nulles sur les constantes. Il suffit donc de prouver qu'il en est de même pour les C_{2t}. Comme

$$\partial_H T_{2t}(1, v) = T_{2t}(v) - T_{2t}(v) + T_{2t}(1)v = 0.$$

On déduit que

$$C'_{2t}(1,v) - C_{2t}(1,v) + G_{2t}(1,v) = \partial_H T_{2t}(1,v) = 0$$

et donc que

$$C_{2t}(1,v) = G_{2t}(1,v)$$

$(C'_{2t}(1,v) = 0$ puisque $*'_\nu$ est un $*_\nu$-produit).
Or

$$G_{2t}(1,v) = \sum_{r+s=2t} T_s C''_{2r}(1,v) - \sum_{s+s'=2t} T_s(1) T_{s'} v - \sum_{r+s=2t} (C_r(T_s(1), v) + C_r(1, T_s v) +$$
$$+ \sum_{r+s+s'=2t} C_r(T_s(1), T_{s'} v)$$

et $C_{2r+1}(1, v) = 0$, il s'en suit alors que

$$G_{2t}(1,v) = \sum_{r+s=2t,\ r \text{ pair}} C_r(1, T_s v) = C_{2t}(1,v)$$

et que $G_{2t}(1, v) = 0$ si et seulement si $\sum_{r+s=2t,\ r \text{ pair}} C_r(1, T_s v) = 0.$

Ainsi C_{2t} est nulle sur les constantes si l'application

$$u \in N \longmapsto \sum_{2r+s=2t} C_{2r}(u, T_s .)$$

est nulle sur les constantes pour tout $v \in N$.
La réciproque est évidente.

Corollaire 2.1. *S' il exite un opérateur d' équivalence de la forme $T_\nu = I_d + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^{2s+1} T_{2s+1}$ transformant un $*_\nu$ -produit faible $*_\nu$ en un $*_\nu$ produit $*'_\nu$, alors $*_\nu$ est aussi un $*_\nu$ -produit.*

Preuve. Si $T_\nu = Id + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^{2s+1} T_{2s+1}$, alors l'application

$$u \in N \longmapsto \sum_{2r+s=2t} C_{2r}(u, T_s.)$$

est identiquement nulle et le corollaire en découle.

3 $*_\nu$ - produits et $*_\nu$ - produits de Vey

A. Lichnerowicz a prouvé dans [5] que tout $*_\nu$ - produit faible s' écrit de manière unique comme produit d' un $*_\nu$ - produit par une constante. Dans ce paragraphe on montre que si le $*_\nu$ - produit faible est de Vey, alors le $*_\nu$ - produit qui s' en déduit par produit par une constante est aussi de Vey.
On appelle $*_\nu$ - *produit de Vey*, tout $*_\nu$ - produit de la forme

$$u *_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r \frac{Q^r(u,v)}{r!}$$

où Q^r est un opérateur différentiel d'ordre maximum r en chaque argument tel que $Q^0(u,v) = uv$ et $Q^1 = P$.

Théorème 3.1. *Etant donné un $*_\nu$ - produit faible de Vey, alors il existe un unique $*_\nu$-produit de Vey qui s'en déduit par produit par une constante.*
Preuve. Soit $*_\nu$ un $*_\nu$ -produit faible de Vey

$$u *_\nu v = uv + \nu P(u,v) + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C_r(u,v) \tag{9}$$

où

$$C_{2r}(u,v) = \frac{Q^{2r}(u,v)}{(2r)!} + k_{2r}, \quad (k_{2r} \in \mathbb{R})$$
$$C_{2r+1}(u,v) = \frac{Q^{2r+1}(u,v)}{(2r+1)!}.$$

(9) peut aussi s'écrire sous la forme

$$u *_\nu v = k_{\nu^2} uv + \nu P(u,v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r \frac{Q^r(u,v)}{(2r)!} \tag{10}$$

où

$$k_{\nu^2} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^{2r} k_{2r}.$$

Soit

$$h_{\nu^2} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^{2r} h_{2r}$$

où $h_{2r} \in \mathbb{R}$.
On peut transformer (9) à partir de l'opérateur d'équivalence faible T_{ν^2} défini par

$$T_{\nu^2} u = h_{\nu^2} u = (1 + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^{2r} h_{2r}) u.$$

on définit ainsi un nouveau $*_\nu$ -produit $*_\nu'$ par:

$$u *' v = h_{\nu^2}(u *_\nu v) = h_{\nu^2}(k_{\nu^2} uv + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r \frac{Q^r(u,v)}{r!}),$$

avec $Q^1 = P$. On a alors,

$$(u *_\nu v) = h_{\nu^2} k_{\nu^2} uv + h_{\nu^2}(\sum_{r=1}^{\infty} \nu^r \frac{Q^r(u,v)}{r!}) = h_{\nu^2} k_{\nu^2} uv + (1 + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^s h_s)(\sum_{r=1}^{\infty} \nu^r \frac{Q^r(u,v)}{r!})$$

où $h_{2s+1} = 0, \forall s = 1, 2, \dots$.
On obtient donc,

$$(u *_\nu v) = h_{\nu^2} k_{\nu^2} uv + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r \frac{Q^r(u,v)}{r!} + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k (\sum_{r+s=k} h_s \frac{Q^r(u,v)}{r!})$$

avec $r,\ s \geq 1$.
C'est à dire que

$$u *_\nu v = h_{\nu^2} k_{\nu^2} uv + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \frac{Q^k(u,v)}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k (\sum_{r+2s=k} h_{2s} \frac{Q^r(u,v)}{r!})$$

du fait que $h_{2s+1} = 0, \forall s \geq 1$. Par suite

$$u *_\nu v = h_{\nu^2} k_{\nu^2} uv + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k [\frac{Q^k(u,v)}{k!} + \sum_{r+2s=k} h_{2s} \frac{Q^r(u,v)}{r!}] = h_{\nu^2} k_{\nu^2} uv + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k C_k'(u,v).$$

où

$$C_k'(u,v) = \frac{Q^k(u,v)}{k!} + \sum_{r+2s=k} h_{2s} \frac{Q^r(u,v)}{r!} \quad (\text{pour } r, s \geq 1)$$

i.e

$$C_k'(u,v) = \frac{1}{k!}[Q^k(u,v) + k! \sum_{r+2s=k} h_{2s} \frac{Q^r(u,v)}{r!}]$$

Finalement,

$$u *_\nu v = h_{\nu^2} k_{\nu^2} uv + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \frac{Q_1^k(u,v)}{k!},$$

avec

$$Q_1^k(u,v) = Q^k(u,v) + k! \sum_{r+2s=k} h_{2s} \frac{Q^r(u,v)}{r!}.$$

Par ailleurs

$$Q_1^1(u,v) = Q^1(u,v) + \sum_{r+2s=1} h_{2s} \frac{Q^r(u,v)}{r!} = Q^1(u,v) = P(u,v).$$

De plus les Q_1^r sont nulles sur les constantes du fait que les Q^r, $(r \geq 1)$ le sont (car $*_\nu$ est un $*_\nu$ -produit faible de Vey). Il suit donc que pour que $*_\nu^{'}$ soit un $*_\nu$-produit de Vey il faut et il suffit que $h_{\nu^2} k_{\nu^2} = 1$, ainsi h_{ν^2} est définie de manière unique, ce qui achève la preuve.

References

[1] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D., *Deformation theory and quantization*, Ann. Physics 121(1978), 61-151.

[2] Fedosov, B., *A simple geometric construction of deformation quantization*, J. Diff. Geom., 40 (1994) 2, 213-238.

[3] Flato, M., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D., *Crochet de Moyal-Vey et quantification*, C.R. Acad. Sc., t. 283, A (1976), 19.

[4] Gestenhaber, M., *Deformation theory of algebraic structures*, Ann.of Math., t.79 (1964), 59-90.

[5] Lichnerowicz, A., *Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique (Les $*_\nu$ -produits)*, Ann.Inst.Fourier.Grenoble, 32, 1 (1982), 157-209.

[6] Lichnerowicz, A., *Existence et équivalence des $*_\nu$ -produits sur une variété symplectique*, C.R.Acad.Sc., t.289, A (1979), 349.

[7] Moyal, J. E., Proc. Cambridge Philos Soc., t.45 (1949), 99-124.

[8] Omori, H., Maeda, Y., Yoshioka, A., *Weyl manifolds and deformation quantization*, Advances in Math. (china) 85 (1991) 224-255.

[9] Schouten, J. A., Conv. Int. Geom. Diff., Cremonese Roma, (1954), 1-7; A. Nijenhuis Indag. Math., t.17 (1955), 390.

[10] Tihami, A., *Une cohomologie pour les algèbres de Poisson quadratiques- Déformations et Classifications*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech, 1993.

[11] De Wilde, M., Lecomte, P. B. A., *Existence of star-products and of formal deformations in Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*, Let.math.phys., 7 (1983), 487-495.