LIBERTAS MATHEMATICA, VOL XXII (2002)

SUR UN THEOREME DE NUSSBAUM

ABDELKADER EL KOUTRI

1 Introduction

Soit A un opérateur linéaire symmétrique dans un espace de Hilbert H de domaine $D(A)$. Un x de H est dit vecteur C^∞ pour A si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n) = C^\infty(A)$. Un élément $x \in C^\infty(A)$ est appelé:

1. *vecteur analytique* si:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\|A^n x\| < \infty \text{ pour un certain } t > 0;$$
2. *vecteur semi-analytique* si:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(2n)!}\|A^n x\| < \infty \text{ pour un certain } t > 0;$$
3. *vecteur quasi-analytique* si:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n x\|^{-1/n} = +\infty;$$
4. *vecteur de Stieltjes* si:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n x\|^{-1/2n} = +\infty.$$

La notion des vecteurs analytiques a été introduite par E. Nelson [3] en 1959. Elle est liée à l'état auto-adjoint de l'opérateur A. Plus exactement, A est esentiellement auto-adjoint si et seulement si l'ensemble de ses vecteurs analytiques est dense dans H ([3]). A.E. Nussbaum [4] a généralisé ce théorème de Nelson via l'introduction des vecteurs quasi-analytiques (la densité des vecteurs analytiques est remplacée par la totalité des vecteurs quasi-analytiques). Nussbaum [5] a généralisé son propre théorème en introduisant la notion de vecteurs de Stieltjes. Dans ce papier nous donnons une nouvelle démonstration de ce théorème de Nussbaum. L'énoncé exact de ce théorème sera donné dans le paragraphe 2.

2 Nouvelle démonstration du théorème

Nous allons maintenant donner une nouvelle démonstration du théorème de Nussbaum [5] suivant:

Théorème 2.1 (Nussbaum). [5] *Soit A un opérateur symétrique, semi-borné et fermé dans un espace de Hilbert H. Alors A est auto-adjoint si et seulement si $V_S(A)$ est total dans H.*

DÉMOSNTRATION: D'abord si A est auto-adjoint, l'ensemble $V_{qa}(A)$ est total dans H, donc $V_S(A)$ l'est à fortiori. Pour la réciproque, supposons que $V_S(A)$ soit total dans H. Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que $\langle Ax, x\rangle \geq \langle x, x\rangle$, pour tout $x \in D(A)$, car si $\langle Ax, x\rangle \geq c\langle x, x\rangle$, on prend à la place de A l'opérateur $B - A - (c-1)I$. De plus, B a les mêmes vecteurs de Stieltjes que A.

Soit A_1 l'extension de Friedrichs de A (on peut voir à ce sujet [7]). L'opérateur A_1 est auto-adjoint. Si A n'est pas auto-adjoint, il existe alors une autre extension auto-adjointe A_2, $A_2 \neq A_1$ et telle que: $\langle A_2x, x\rangle \geq c_2\langle x, x\rangle$, $c_2 \in (0,1)$, pour tout $x \in D(A_2)$.

Soit $B_1 = c_2I - A_1$ et $B_2 = c_2I - A_2$.

Les opérateurs B_1 et B_2 sont alors auto-adjoints et négatifs. Ils sont donc générateurs infinitésimaux de semi-groupe contractifs analytiques U_z et V_z, dans le demi-plan $Rez > 0$ respectivement. Soit maintenant $x \in V_S(A)$ et soit $f(z)$ définie par:

$$f(z) = \langle U_zx - V_zx, y\rangle, \ y \in H.$$

La fonction $f(z)$ est analytique dans le demi-plan $Rez{\geq}0$, et vérifie $f^{(n)}(0){=}0$, pour tout n. De plus, pour tout z dans le demi-plan $Rez > 0$, on a: $f^{(n)}(z) = \langle U_z(c_2I - A)^n x - V_z(c_2I - A)^n x, y\rangle$. Par suite:

$$\sup_{Rez\geq 0} |f^{(n)}(z)| \leq k\|(c_2I - A)^n x\|, \ k = \text{constante}.$$

La fonction $f(z)$ est donc identiquement nulle d'après un théorème de Korenbljum [1], car $x \in V_S(c_2I - A) = V_S(A)$. Il en résulte que $U_zx = V_zx$, comme ceci est vrai pour tout $x \in V_S(A)$ et que $V_S(A)$ est total dans H, $U_z = V_z$, et par suite $B_1 = B_2$. Mais $B_1 = B_2$ implique que $A_1 = A_2$. Ceci est une contradiction avec $A_1 \neq A_2$. L'opérateur A est donc auto-adjoint. Le cas de A tel que $\langle Ax, x\rangle \leq \langle x, x\rangle$ se fait d'une manière analogue. □

References

1. B.I. Korenbljium, *Conditions of nontriviality of certain classes of functions analytic in a sector, and problem of quasianalyticity*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 166 (1966), 1046–1049, Soviet Math. Dokl., 7(1966), 232–236.
2. S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.
3. E. Nelson, *Analytic vectors*, Ann. of Math. (2) 70 (1959), 572–615.
4. A.E. Nussbaum, *Quasi-analytic vectors*, Ark. Math. 6 (1965), 179–191.
5. A.E. Nussbaum, *A note on quasi-analytic vectors*, Studia Math. 33 (1969), 305–309.
6. B. Simon, *The theory of semi-analytic vectors*, A new proof of a theorem of Masson and MacClary, Indiana Univ. Math. J. 20 (1970:1971), 1145–1151.
7. K. Yosida, *Functional analysis*, Sixth edition 1980, Springer-Verlag.