

SUR LA SURJECTIVITÉ DES APPLICATIONS
MULTIVALENTES DIFFÉRENTIABLES

G. Isac

§1. Les applications multivalentes sont utilisées dans les problèmes de control optimal [5], [7], [11], [12], [24] dans la théorie des équations à cotangent [11], [12], dans l'économie mathématique [13] et récemment dans l'étude de la stabilité des équations fonctionnelles et des algorithmes numériques [19], [21-23].

Par les recherches actuelles sont mis en évidence plusieurs classes remarquables d'applications multivalentes [9], [21-23] et ont été démontrés quelques théorèmes de surjectivité [19], [21-23].

Les théorèmes de surjectivité pour les applications multivalentes sont utilisés dans les théorèmes d'existence pour les inclusions différentiables, dans l'étude de la stabilité, dans l'étude de la dynamique des systèmes économiques [13] et dans les problèmes d'optimisation.

Nous sommes intéressés par l'étude de la surjectivité des applications multivalentes, notamment en présence de la différentiabilité.

Récemment ont été définis plusieurs concepts de différentiabilité pour les applications multivalentes [1], [3], [5], [6], [8], [14], [18].

Nous présentons dans cette note un théorème de surjectivité pour les applications multivalente utilisant la différentiabilité au sens de DeBlasi.

Le résultat obtenu est en même temps une généralisation de l'alternative de Fredholm et une généralisation du théorème de l'application ouverte de Banach.

§2. Premièrement nous précisons les notions et les notations qui seront utilisées.

Les notions de base sur les applications multivalentes sont ceux qui se trouvent dans l'ouvrage [2].

Soit E un espace de Banach, $x_0 \in E$ et $r > 0$;

si: $S(x_0, r) = \{x \in E \mid \|x_0 - x\| < r\}$,

$\bar{S}(x_0, r) = \{x \in E \mid \|x_0 - x\| \leq r\}$,

nous posons, $S = S(0, 1)$ et $\bar{S} = \bar{S}(0, 1)$.

Notations

$\bar{E}_b(E)$ = la famille des ensembles bornés, non-vides de l'espace E .

$\bar{E}_{bf}(E)$ = la famille des ensembles bornés, non-vides et fermés de l'espace E .

$\bar{E}_{bfc}(E)$ = la famille des ensembles bornés, non-vides, fermés et convexes de l'espace E .

Si $A \subset E$ nous notons par \bar{A} l'enveloppe fermée de A .

Nous considérons la fonction: $d: \bar{E}_b(E) \times \bar{E}_b(E) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$d(A, B) = \inf \{r > 0 \mid A \subset B + rS \text{ \& } B \subset A + rS\}$$

et nous pouvons vérifier les propriétés suivantes.

1°) $(\forall A, B \in \bar{E}_b(E)) [(d(A, B) \geq 0) \text{ \& } (d(A, A) = 0)]$.

2°) $(\forall A, B \in \bar{E}_b(E)) (d(A, B) = d(B, A))$

3°) $(\forall A, B, C \in \bar{E}_b(E)) (d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B))$.

La restriction de la fonction d à l'ensemble $\bar{E}_{bf}(E)$ s'appelle la métrique de Hausdorff et nous posons: $d_H = d|_{\bar{E}_{bf}(E)}$. Nous appelons la fonction d l'écart de

Hausdorff.

Pour la métrique de Hausdorff nous avons aussi la propriété suivante:

4°) $(\forall A, B \in \bar{E}_{bf}(E)) (d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B)$

Nous remarquons que la propriété 4°) n'est pas vraie sur l'ensemble $\bar{E}_b(E)$.

Les propriétés suivantes sont utilisées dans le développement du calcul différentiel de DeBlasi.

Si $A, A_1, B, B_1 \in \bar{E}_b(E)$ alors nous avons:

5°) $(\forall \lambda \in \mathbb{R}_+) (d(\lambda A, \lambda B) = \lambda d(A, B))$

6°) $d(A + B, A_1 + B_1) \leq d(A, A_1) + d(B, B_1)$.

Si $A, B \in \bar{E}_{bfc}(E)$ et $C \in \bar{E}_b(E)$ alors nous avons:

7°) $d(A + C, B + C) = d(A, B)$.

Pour prouver la propriété 7°) on utilise le résultat suivant démontré par Rådström [20]: Si $A, B, C \subset E$, B étant convexe et fermé, C borné, alors la relation $A + C \subset B + C$ implique, $A \subset B$.

Soit maintenant E, F deux espaces de Banach et $U \subset E$ un ensemble ouvert non-vidé.

Nous disons que l'application multivalente $f: U \rightarrow F$ est supérieurement semi-continue en $x_0 \in U$ si et seulement si pour chaque voisinage V de $f(x_0)$ il existe un voisinage W de x_0 tel que $f(W) \subset V$.

Si $f: U \rightarrow E_b(F)$, nous utilisons pour la semi-continuité supérieure la caractérisation suivante.

L'application f est sup. semi-continue en $x_0 \in U$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que: $f(x_0 + x) \subset f(x_0) + \varepsilon S$ quel que soit x tel que $\|x\| < \delta_\varepsilon$.

Aussi dans ce cas $f: U \rightarrow E_b(F)$ est continue en $x_0 \in U$ si et seulement si, $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta_\varepsilon > 0) (\forall x, \|x\| < \delta_\varepsilon) [(f(x_0 + x) \subset f(x_0) + \varepsilon S) \& (f(x_0) \subset f(x_0 + x) + \varepsilon S)]$.

§3. Il existe présentement plusieurs concepts de différentiabilité pour les applications multivalentes [1], [5], [6], [9], [14], [18], [24] mais parmi ces concepts, la différentiabilité de De Blasi est le concept le plus riche en propriétés et le plus simple comme manipulation.

Le concept de différentiabilité au sens de Banks et Jacobs utilise une construction abstraite difficile à manipuler.

La différentiabilité au sens de Gautier est un concept intéressant mais la différentielle dans ce sens n'est pas positivement homogène, propriété qui est importante pour le résultat que nous présentons. [nous observons aussi que la positivité homogène est importante quand la dérivée directionnelle est utilisée en mécanique ou en optimisation].

Soit E et F deux espaces de Banach et $f: E \rightarrow E_b(F)$. Nous disons que f est positivement homogène si: $(\forall \lambda \in \mathbb{R}_+) (\forall x \in E) (f(\lambda x) = \lambda f(x))$. Nous posons:

$$\text{dom } f = \{x \in E \mid f(x) \neq \emptyset\},$$

$$\text{graph } f = \{(x, y) \in E \times F \mid y \in f(x)\}$$

Nous disons que l'application f est convexe si:

$$(\forall x_1, x_2 \in \text{dom } f) (\forall \lambda \in [0, 1]) (f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \supset \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)).$$

Nous observons aussi que f est convexe si et seulement si, graph f est convexe dans l'espace $E \times F$.

Nous disons que f est fermée si et seulement si, graph f est un ensemble fermé dans l'espace $E \times F$.

Soit $U \subset E$ un ensemble ouvert.

Definition [De Blasi] (5).

Nous disons que l'application $f: U \rightarrow E_b(F)$ est différentiable en $x_0 \in U$ s'il existe une application $\mathcal{D}_D[x_0]: E \rightarrow E_{bfc}(F)$ qui est sup. semi-continue, positivement homogène et telle que: $(\exists \delta > 0) (\forall x, \|x\| < \delta) (d(f(x_0 + x), f(x_0) + \mathcal{D}_D[x_0](x))) = O(x)$ où: $O(x)$ est une fonction positive telle que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{O(x)}{\|x\|} = 0. //$$

L'application $\mathcal{D}_D[x_0]$ s'appelle la différentielle (au sens de De Blasi) de l'application f en $x_0 \in U$.

Un concept plus particulier de différentielle a été défini par Martelli et Vignoli.

Soit $U \subset E$ un ensemble ouvert et $K_0(F)$ la famille des ensembles compacts et convexes de l'espace F .

Definition [Martelli - Vignoli] [14].

Nous disons que l'application $f: U \rightarrow K_0(F)$ est différentiable en $x_0 \in U$ s'il existe une application $\mathcal{D}_{MV}[x_0]: E \rightarrow K_0(F)$ qui est sup. semi-continue, positivement homogène et telle que:

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + \mathcal{D}_{MV}[x_0](x) + R(x) \text{ où:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|R(x)|}{\|x\|} = 0 \quad \& \quad |R(x)| = \sup \{\|y\| \mid y \in R(x)\}$$

Si la différentielle de De Blasi existe alors elle est unique,

Si f est différentiable au sens de Martelli - Vignoli alors f est différentiable au sens de De Blasi et les deux différentielles coïncident,

Il existe des applications qui sont différentiables au sens de De Blasi mais qui ne sont pas différentiables au sens de Martelli-Vignoli [5].

La différentielle de De Blasi a des propriétés remarquables [5].

§4. Soit E un espace de Banach et $A \subset E$ un ensemble fermé. Si $y_0 \in E \setminus A$ alors on sait que la distance $\rho(y_0, A) = \inf_{x \in A} \|y_0 - x\|$ vérifie la relation: $\rho(y_0, A) > 0$.

Nous disons que la distance de y_0 à A s'atteint en $z_0 \in A$ si, $\rho(y_0, A) = \|y_0 - z_0\|$.

On sait que si y_0 et A sont arbitrairement choisis dans un espace de Banach quelconque alors la distance de y_0 à A ne s'atteint pas toujours. Si l'espace E est un espace de Banach uniformément convexe alors le théorème d'Edelstein

affirme que si $A \subset E$ est un ensemble fermé alors l'ensemble des points qui ont la propriété que la distance à A s'atteint est dense dans l'espace E .

Nous utilisons le résultat suivant qui, d'un certain point de vue, est plus puissant que le résultat d'Edelstein.

Théorème [Zabreiko-Krasnoselskii]. *)

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, $A \subset E$ un sous-ensemble fermé et $x_0 \in E/A$ alors il existe une norme équivalente $\|\cdot\|_*$ sur E telle que la distance de x_0 à A est atteinte [mais pas plus qu'en deux points]. //

Si E et F sont deux espaces de Banach et $f: E \rightarrow F$ une application multivalente alors nous disons que f est localement surjective si et seulement si, elle applique chaque ensemble ouvert contenu dans $\text{int. dom. } f$ sur un ensemble ouvert.

Le résultat principal de cette note est le théorème suivant.

Théorème

Soit E, F deux espaces de Banach et $f: E \rightarrow E_D(F)$ une application multivalente différentiable au sens de De Blasi. Si:

1°) $\text{Im } f$ est fermée dans l'espace F ,

2°) pour chaque $x \in E$, $\overline{D_D[x](E)} = F$, alors:

i) pour tout $y \in F$ il existe $x^* \in E$ tel que $y \in f(x^*)$

ii) si en plus f est convexe alors elle est localement surjective.

Démonstration

i) Nous observons que la définition de la différentiabilité de De Blasi, la construction et les propriétés de l'écart de Hausdorff et un calcul comme dans l'ouvrage [4] nous donnent que la différentiabilité de De Blasi est invariante au changement des normes (équivalentes).

Soit $f(E) = \text{Im } f = \bigcup_{x \in E} f(x)$; par hypothèse $f(E)$ est fermé dans l'espace F . Nous supposons qu'il existe $y_0 \in F$ tel que $y_0 \notin f(E)$.

Le théorème de Zabreiko-Krasnoselskii implique qu'il existe une norme équivalente $\|\cdot\|_*$ sur l'espace F et il existe $x_0 \in E$ tel que, il existe un élément $y_* \in f(x_0)$ ayant la propriété que la distance de y_0 à $f(E)$ est atteinte en y_* . Soit:

*) Notes de séminaire [Séminaire Gh. Marinescu: - Analyse non-linéaire - Université de Bucarest - 1972].

$$\alpha = \|y_0 - y_*\|_* = \inf_{y \in f(E)} \|y_0 - y\|_* > 0.$$

Par hypothèse nous savons que $\overline{\mathcal{D}_D[x_0]}(E) = F$, donc il existe $h_0 \in E$ et il existe aussi $z_* \in \mathcal{D}_D[x_0](h_0)$ tels que: $\|y_0 - y_* - z_*\|_* \leq \frac{\alpha}{2}$.

Nous remarquons maintenant que si $y \in F$ est un élément qui vérifie la propriété:

$$(\theta_1): \|y - y_* - \varepsilon z_*\|_* < \varepsilon \frac{\alpha}{2} \text{ ou: } \varepsilon \in]0, 1[$$

alors nous avons la relation suivante:

$$(\theta_2): \|y - y_0\|_* < \alpha.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|y - y_0\|_* &\leq \|y - y_* - \varepsilon z_*\|_* + \|y_0 - y_* - \varepsilon z_*\|_* < \\ &< \varepsilon \frac{\alpha}{2} + (1 - \varepsilon) \|y_0 - y_*\|_* + \varepsilon \|y_0 - y_* - z_*\|_* \leq \alpha. \end{aligned}$$

Donc si l'élément $y \in F$ vérifie la relation (θ_1) alors la relation

(θ_2) implique que $y \notin f(E)$.

Nous obtenons ainsi que si $\varepsilon \in]0, 1[$ alors quel que soit

$y \in f(x_0 + \varepsilon h_0)$ nous avons:

$$(\theta_3): \|y - y_* - \varepsilon z_*\|_* \geq \varepsilon \frac{\alpha}{2}.$$

Puisque la différentielle de De Blasi est positivement homogène, nous avons

que $\varepsilon z_* \in \mathcal{D}_D[x_0](\varepsilon h_0)$ étant donné que $z_* \in \mathcal{D}_D[x_0](h_0)$. Comme

$y \in f(x_0 + \varepsilon h_0)$, $y_* \in f(x_0)$, $\varepsilon z_* \in \mathcal{D}_D[x_0](\varepsilon h_0)$ et comme:

$$d(f(x_0 + \varepsilon h_0), f(x_0) + \mathcal{D}_D[x_0](\varepsilon h_0)) = \max \left\{ \sup_{x \in \Omega_1} \inf_{y \in \Omega_2} d(x, y), \sup_{y \in \Omega_2} \inf_{x \in \Omega_1} d(y, x) \right\}$$

ou: $\Omega_1 = f(x_0 + \varepsilon h_0)$, $\Omega_2 = f(x_0) + \mathcal{D}_D[x_0](\varepsilon h_0)$, nous obtenons la relation suivante utilisant aussi la relation (θ_3)

$(\theta_4): (\forall \varepsilon \in]0, 1[) (d(f(x_0 + \varepsilon h_0), f(x_0) + \mathcal{D}_D[x_0](\varepsilon h_0))) \geq \varepsilon \frac{\alpha}{2}$. Mais, la relation (θ_4) est en contradiction avec la relation:

$$d(f(x_0 + \varepsilon h_0), f(x_0) + \mathcal{D}_D[x_0](\varepsilon h_0)) = \mathcal{O}(\varepsilon h_0) \text{ où:}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(\varepsilon h_0)}{\varepsilon \|h_0\|} = 0, \text{ que nous avons par hypothèse.}$$

La contradiction obtenue nous donne que pour tout $y \in F$ il existe $x^* \in E$ tel que $y \in f(x^*)$ ce qui prouve l'affirmation i).

- ii) Nous supposons en plus que f est convexe. Puisque f est différentiable au sens de De Blasi le théorème 3.3 de l'ouvrage [5] implique que le graph f est fermé. Comme nous avons prouvé que f est surjective et F est un espace de Banach nous avons que $f(E)$ est un ensemble de la deuxième

classe de Baire.

Ainsi le théorème 1 de l'ouvrage [19] nous donne que pour chaque $x \in \text{Int dom } f$ et pour chaque voisinage ouvert U de x tel que $U \subset \text{dom } f$ nous avons:

$$(\theta_5): f(x) \cap \text{Int } f(U) \neq \emptyset$$

pour prouver la surjectivité locale de f il est suffisant de prouver la relation suivante:

$$(\theta_6): f(x) \subset \text{Int } f(U) \quad \text{pour tout } x \in \text{Int dom } f.$$

De la relation (θ_5) il résulte qu'il existe $y_0 \in f(x) \cap \text{Int } f(U)$ si x est arbitrairement choisi dans l'ensemble $\text{Int dom } f$. Si $f(x)$ a un seul élément évidemment nous avons la relation (θ_6) . Nous supposons que nous ne sommes pas dans ce cas. Donc il existe $z \in f(x)$ tel que $z \notin y_0$.

Soit $w = \lambda z + (1 - \lambda)y_0$ où $\lambda > 1$.

Puisque f est surjective il existe $x_1 \in E$ tel que $w \in f(x_1)$. Pour μ suffisamment petit nous avons, $x^* = \mu x_1 + (1 - \mu)x \in U$.

Comme f est convexe nous avons: $\mu f(x_1) + (1 - \mu)f(x) \subset f(x^*) \subset f(U)$

d'où nous obtenons: $w_0 = \mu w + (1 - \mu)z \in f(U)$.

Nous pouvons supposer $\mu > 0$ et alors les expressions de w et w_0 et le fait que $\lambda > 0$ nous donnent:

$$z = \frac{1}{\lambda\mu + 1 - \mu} w_0 + \frac{\mu(\lambda - 1)}{\lambda\mu + 1 - \mu} y_0.$$

Si nous posons: $\xi = \frac{\mu(\lambda - 1)}{\lambda\mu + 1 - \mu}$ nous pouvons affirmer qu'il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que: $z = (1 - \xi)w_0 + \xi y_0$. Mais alors puisque $y_0 \in \text{Int } f(U)$ et $w_0 \in f(U)$ il résulte qu'il faut avoir $z \in \text{Int } f(U)$ et le théorème est démontré. //

Corollaire

Soit E, F deux espace de Banach et $f: E \rightarrow K_0(F)$ une application différentiable au sens de Martelli-Vignoli. Si:

- 1°) $\text{Im } f$ est fermée dans l'espace F ,
- 2°) pour chaque $x \in E, \overline{D}_{MV}[x_0](E) = F$, alors:

- i) f est surjective
- ii) si en plus f est convexe alors elle est localement surjective. //

Remarque

Dans le cas du corollaire nous utilisons la métrique de Hausdorff d_H .

Nous observons que du théorème précédent il résulte qu'une étude sur la différ-

entiabilité au sens de De Blasi pour les applications multivalentes convexes, est important.

Le théorème reste vraie si la différentiabilité au sens de De Blasi est remplacée par la propriété que pour tout $(x_0, y_0) \in E \times F$ tel que $y_0 \in f(x_0)$ il existe une dérivée inférieure $u(x_0, y_0) \in L(E, F)$ au sens de Methlouthi [18] passant par (x_0, y_0) et que $u(x_0, y_0)$ a l'image dense dans l'espace F .

Nous ne savons pas s'il existe un théorème similaire dans le cas de la G -différentiabilité définie par Mirică [15] ou dans le cas de la prédifférentielle au sens Ioffe [9] ou dans le cas de l'existence d'un approximant d'ordre un au sens de Ioffe [10].

REFERENCES

- [1] Banks, H. T., Jacobs, M. Q. "A differential calculus for multifunctions," Journ. of Math. Anal. and Appl., Vol. 29, 1970, pp. 246-272.
- [2] Berge, C. "Espaces topologiques et fonctions multivoques," Dunod, Paris, 1959.
- [3] Bridgland, T. F. "Trajectory integrals of set-valued functions, Pacific Journ. of Math., Vol. 33, Nr., 1, 1970, pp. 43-67.
- [4] Cartan, H. "Calcul différentiel," (Hermann-Paris-1967).
- [5] De Blasi, F. S. "On the differentiability of multifunctions," Pacific Journ. of Math., Vol. 66, 1976, pp. 67-81.
- [6] Gautier, S. "Différentiabilité des multiapplications," Publ. Math. Univ. de Pau et des Pays de l'Adour, 1978.
- [7] Halkin, H. "Mathematical Programming without Differentiability," [In: Calculus of Variations and Control Theory-Edited by D. L. Russell - Academic Press (1976)].
- [8] Hukuhara, M. "Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe," Funkcialaj Ekvacioj 10, 1967, pp. 205-223.
- [9] Ioffe, A. D. "Différentielles généralisées d'applications localement lipschitziennes d'un espace de Banach dans un autre," C. R. Acad. Sc. Paris t, 289, 1979, pp. A-637-640.
- [10] ----- "Necessary and sufficient conditions for a local minimum: (1) A reduction theorem and first order conditions," Siam J. Control and Optim., Vol. 17, Nr. 2, 1979, pp. 245-250.
- [11] Lasota, A. "Une généralisation du premier théorème de Fredholm et ses applications à la théorie des équations différentielles ordinaires," Ann. Polon. Math. 18, 1966, pp. 65-77.

- [12] Lasota, A. and Opial, A. "On the existence and uniqueness of solutions of non-linear functional equations," *Bull. Acad. Polon. Sc. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.* 15, 1967, pp. 797-800.
- [13] Makarov, V. L. and Rubinov, A. M. "*Mathematical theory of economic dynamics and equilibria*," Springer-Verlag, 1977.
- [14] Martelli, M. and Vignoli, A. "On differentiability of multivalued maps," *Boll. U.M.I.* (4) 10, 1974, pp. 701-712.
- [15] Mirică, S. "A note on the generalized differentiability of mappings," *Nonlinear Anal. Theory, Meth. & Appl.*, Vol. 4, Nr. 3, 1980, pp. 567-575.
- [16] Milojevič, P. S. "Some generalizations of the first Fredholm theorem to multivalued A-proper mappings with applications to nonlinear elliptic equations," *Journ. of Math. Anal. and Appl.*, Vol 65, 1978, pp. 468-502.
- [17] Milojevič, P. S. and Petryshyn, W. V. "Continuation theorem and the approximation solvability of equations involving multivalued A-proper mappings," *J. Math. Anal. Appl.* 60, 1977, pp. 658-692.
- [18] Methlouthi, H. "*Calcul différentiel multivoque*," *Cahiers mathématiques de la décision* Nr. 7702, Univ. Paris-Dauphine.
- [19] Pham Canh Duong and Hoang Tuy "Stability, surjectivity and local invertibility of non-differentiable mappings," *Acta Math. Vietnamica* Tom 3 Nr., 1, 1978, pp. 89-105.
- [20] Rådström, H. "An embedding theorem for spaces of convex sets," *Proc. A.M.S.* Nr. 3, 1952, pp. 165-169.
- [21] Robinson, S. M. "Normed convex processes," *Trans. of the A.M.S.*, Vol. 174, 1972, pp. 127-140.
- [22] ----- "Stability theory for systems of inequalities. Part I: Linear systems," *Siam Num. Anal.*, Vol. 12, Nr. 5, 1975, pp. 754-769.
- [23] ----- "Stability theory for systems of inequalities. Part II: Differentiable nonlinear systems," *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 13, Nr. 4, 1976.
- [24] Warga, J. "*Derivate containers, inverse functions and controllability*," [In: *Calculus of variations and control theory* - Edited by D. L. Russell. Academic Press (1976)].

