

EXISTENCE D'UNE SOLUTION PRESQUE-PERIODIQUE
D'UNE EQUATION INTEGRALE A RETARD
DANS UN ESPACE DE HILBERT

K. Ezzinbi et E. Aït Dads

Abstract: In the recent paper [3-a], Fink and Gatica gave some sufficient conditions for the existence of positive almost periodic solutions for the integral equation $x(t) = \int_{t-\tau}^t f(s, x(s)) ds$. In another paper, we have given some sufficient conditions and modified the paper [3-a]. In this paper we extend the results to the case when f is defined on $R \times H$, where H is a real Hilbert space.

Résumé: Dans [3-a] Fink et Gatica, ont donné des conditions suffisantes d'existence d'une solution presque-périodique de l'équation: $x(t) = \int_{t-\tau}^t f(s, x(s)) ds$. Dans un premier papier, nous avons donné des conditions suffisantes et avons fait une amélioration du dit papier. Dans ce papier, nous étendons ces résultats au cas où f est définie sur $R \times H$ avec H un espace de Hilbert réel.

1. Introduction

Dans ce travail, nous considérons l'équation intégrale à retard de type

$$x(t) = \int_{t-\tau}^t f(s, x(s)) ds \quad (1)$$

où f est une fonction sur $R \times H$ et a valeurs dans H , avec H un espace de Hilbert réel, et τ est une constante positive, appelée retard. Notons que dans le cas scalaire, cette équation a été l'objet de plusieurs travaux, dont nous citons certaines références, à savoir Busenberg [1], Cooke [2], Nussbaum, [4] et Fink [3,a]. Nous commençons notre étude par l'existence de solutions qui sont contenues dans un convexe compact; puis nous montrons dans une deuxième partie que parmi celles-ci il existe une solution qui est de norme minimale. Dans la dernière partie, nous montrons que la solution de norme minimale est presque-périodique.

Définition 1: Une solution de (1) est dite K -compacte, si elle est contenue dans le convexe compact K .

Notation: $x_0 \subseteq K$. i.e., $\forall t \in \mathbf{R}$. $x_0(t) \in K$.

Lemma 1: On suppose que: $f \in C(\mathbf{R} \times H, H)$ et pour tout compact K de H , $f(\mathbf{R} \times K)$ est relativement compact. Si (1) admet une solution K -compacte, alors elle admet une solution de norme minimale dans K .

Preuve: Soit $x_0(t)$ une solution de (1) qui est K -compacte, donc $x_0 \subseteq K$, avec K convexe compact. On pose:

$$\alpha = \inf \left\{ \|x\|, x \subseteq K, t_0 q_0 \quad \forall t, x(t) = \int_{t-\tau}^t f(s, x(s)) ds \right\}$$

et

$$\alpha_n = \inf \left\{ \sup_{|t| \leq n} \|x(t)\|, x \subseteq K \text{ et } \forall t, x(t) = \int_{t-\tau}^t f(s, x(s)) ds \right\}$$

Il est clair que la suite (α_n) est croissante, bornée, car $x \subseteq K$, et de plus

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n.$$

Par conséquent, $\forall n, \exists x_n \subseteq K$ avec $x_n(t) = \int_{t-\tau}^t f(s, x_n(s)) ds$

et

$$\sup_{|t| \leq n} \|x_n(t)\| \leq \alpha_n + \frac{1}{n}$$

d'où

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \|x_n(t)\| \leq 2 \sup_{t \in \mathbf{R}, x \in K} \|f(t, x)\| < \infty, \forall n.$$

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite equicontinue, equibornée, on peut alors en extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ qui est convergente $x_{n_k} \rightarrow y$. Uniformément sur tout compact de \mathbf{R} . Par le théorème de la convergence

$$y(t) = \int_{t-\tau}^t f(s, y(s)) ds \quad \text{avec } y \subseteq K.$$

Soit $t \in \mathbf{R}$, il existe k_0 tel que $|t| < n_k$ pour $k \geq k_0$, donc

$$\|x_{n_k}(t)\| \leq \sup_{|t| \leq n_k} \|x_{n_k}(t)\| \leq \frac{1}{n_k} \alpha_{n_k} \text{ pour } k \geq k_0.$$

Par passage à la limite on a: $|y(t)| \leq \alpha \quad \forall t \in \mathbf{R}$. D'où $\|y\| \leq \alpha$, soit $\alpha = \|y\|$, d'où la démonstration du lemme 1.

Lemme 2: On suppose que: $f \in C(\mathbf{R} \times H, H)$, et f est presque-périodique en t , uniformément par rapport à $x \in H$. Si (1) admet une solution K -compacte, alors elle admet une solution de norme minimale dans K .

Preuve: Application du lemme 1.

Par la suite $H(f)$ désigne le "hull" de f (ou ensemble limite de f).

Lemme 3: $f \in C(\mathbf{R} \times H, H)$ est presque-périodique en t , uniformément par rapport à $x \in H$. Soit $g \in H(f)$. Alors: si (1) admet une solution K -compacte, l'équation $y(t) = \int_{t-\tau}^t g(s, y(s)) ds$ admet une solution K -compacte et par suite une solution de norme minimale dans K .

Démonstration:

Soit $g \in H(f)$; il existe une suite $\alpha' = (\alpha'_n)$, telle que $g(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \alpha'_n, x)$ uniformément sur $\mathbf{R} \times K$ avec K compact de H (cette limite sera notée dorénavant $T_{\alpha'} f$). On a:

$$x(t + \alpha'_n) = \int_{t-\tau}^t f(s + \alpha'_n, x(s + \alpha'_n)) ds$$

et que $x \subseteq K$; $(x(t + \alpha'_n))$ est équicontinue, équibornée; il existe alors une sous-suite α de α' tels que $y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(t + \alpha_n)$ existe uniformément sur tout compact de \mathbf{R} qu'on note $T_{\alpha} x$. Du fait que f est uniformément continue sur $\mathbf{R} \times K$, on vérifie facilement que:

$$y(t) = \int_{t-\tau}^t g(s, y(s)) ds.$$

et que $y \subseteq K$. Comme g satisfait aux hypothèses du lemme 2, l'équation $T_g x = x$ admet une solution de norme minimale dans K avec:

$$(T_g x)(t) = \int_{t-\tau}^t g(s, x(s)) ds$$

Existence d'une solution presque-périodique

On suppose que:

(H₁) $f: \mathbf{R} \times H \longrightarrow H$ est continue, presque-périodique en t , uniformément par rapport à $x \in H$

(H₂) f est $\frac{1}{2}$ - linéairement affine i.e. $\forall (t, x, y) \in \mathbf{R} \times H^2$,

$$f(t, \frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2} f(t, x) + \frac{1}{2} f(t, y),$$

(H₃) $\forall g \in H(f)$, il existe $\lambda(g) > 0$ tel que si x_1, x_2 sont deux solutions différentes alors $\inf_{t \in \mathbf{R}} \|x_1(t) - x_2(t)\| \geq \lambda(g)$ (condition de séparation).

Theorem 1: Sous les hypothèses H₁, H₂, H₃, il existe un convexe compact K , tel que (1) admet une solution K -compacte ssi elle admet une solution presque-périodique.

Preuve: Si (1) admet une solution presque-périodique, il existe un K compact, tel que cette solution prend ses valeurs dans ce compact. Supposons qu'il existe K un convexe-compact, tel que (1) admet une solution K -compacte. D'après le lemme 2, il existe une solution de norme minimale qu'on note \underline{x}_f

Montrons que \underline{x}_f est unique. Supposons qu'il existe x_1, x_2 telles que $\|x_1\| = \|x_2\| = \|\underline{x}_f\|$ avec $x_1 \neq x_2$.

D'après (H₃) on a: $\inf_{t \in \mathbf{R}} \|x_1(t) - x_2(t)\| = p > 0$.

D'après l'identité du parallélogramme:

$$\frac{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2}{2} = \frac{\|x_1 + x_2\|^2}{4} + \frac{\|x_1 - x_2\|^2}{4},$$

donc

$$\frac{\|x_1(t) + x_2(t)\|^2}{4} \leq \|\underline{x}_f\|^2 - \frac{p^2}{4}$$

Or f est $\frac{1}{2}$ - linéairement affine on a: $\frac{x_1 + x_2}{2}$ est encore solution de (1) et de plus $\frac{x_1 + x_2}{2} \in K$. De l'absurdité du fait que: \underline{x}_f est de norme minimale. Ceci montre que \underline{x}_f est unique.

De même, il y a unicité de la solution de norme minimale de toute equation limite.

Dans la suite on aura besoin du lemme suivant:

Lemme 4: Supposons que (1) admet une solution K -compacte. Alors, il existe $p \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $g \in H(f)$ $\text{Card}\{x, T_g x = x \text{ et } x \subseteq K\} = p$.

Preuve: Montrons d'abord que $\forall g \in H(f)$ $\text{Card}\{x, T_g x = x \text{ et } x \subseteq K\} < +\infty$. Supposons le cas contraire, donc, il existe $(x_n)_{n \geq 0}$ avec $T_g x_n = x_n$ et $x_n \subseteq K$ et pour $n \neq m$, $x_n \neq x_m$; d'après la condition de séparation $\forall n, m; n \neq m$ on a $\inf_t \|x_n(t) - x_m(t)\| \geq \lambda(g) > 0$ ($x_n(t) \in K$), donc elle admet une sous suite $(x_{n_k})_k$ qui converge; donc $\|x_{n_k}(t) - x_{m_k}(t)\| \leq \lambda(g)$ pour $k \geq k_0$ donné, d'où l'absurdité.

Ainsi $\forall g \in H(f)$ $\text{Card}\{x, T_g x = x \text{ et } x \subseteq K\} < \infty$

Soit $g, h \in H(f)$; on sait qu'il existe $\alpha = (\alpha_n)_n$ telle que $h = T_\alpha g$ uniformément sur $\mathbb{R} \times K_0$, un compact quelconque de H .

Soit $n_1 = \text{Card}\{x, T_g x = x, x \subseteq K\}$,

$n_2 = \text{Card}\{x, T_h x = x, x \subseteq K\}$.

Soient x_1, x_2, \dots, x_{n_1} les solutions de $T_g x = x$ qui sont dans K ; $\forall i \neq j: i, j = 1, \dots, n_1$ on a: $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|x_i(t) - x_j(t)\| > 0$; de plus, $\forall i$, il existe une sous suite de α qu'on note encore par α telle que $T_\alpha x_i = y_i$ uniformément sur tout compact de H , avec $y_i = T_h x_i$ et $y_i \subseteq K$.

De plus $\forall i \neq j$ on a $y_i \neq y_j$ d'où $n_2 \geq n_1$. De même, pour h , il existe β , telle que $g = T_\beta h$ et on aura $n_1 \geq n_2$, d'où $n_1 = n_2$.

Ce qui achève la démonstration.

Remarque: Soit $g \in H(f)$ avec $T_\alpha f = g$. Soit $\zeta(t) = \int_{t-\tau}^t g(s, \zeta(s)) ds$ avec $\zeta \subseteq K$.

Alors il existe une sous-suite de α qu'on note encore α telle que

$$\zeta = T_\alpha x \text{ avec } T_f x = x \text{ et } x \subseteq K.$$

Montrons maintenant que \underline{x}_f est presque-périodique

Soit $\alpha' = (\alpha'_n)_{n \geq 0}$, il existe a sous-suite de α' telle que $T_{\alpha}f = g$ avec $g \in H(f)$ et que $T_{\alpha} \underline{x}_f = y$ avec $y = T_g y$.

Soit ζ solution de $T_g \zeta = \zeta$ avec $\zeta \subseteq K$. D'après la remarque précédente, il existe x , telle que $T_f x = x$ et $x \subseteq K$ et qu'il existe une sous-suite de α qu'on note α telle que $\zeta = T_g x$.

$$\text{On a } \sup_{t \in \mathbf{R}} \|\underline{x}_f(t)\| = \sup_{t \in \mathbf{R}} \|x(t)\|.$$

Soit $\epsilon > 0$, il existe $m \geq 0$ tel que

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \|\underline{x}_f(t + \alpha_n)\| \leq \sup_{\|t\| \leq m} \|x(t + \alpha_n)\| + \epsilon,$$

donc

$$\|\underline{x}_f(t + \alpha_n)\| \leq \sup_{\|t\| \leq m} \|x(t + \alpha_n)\| + \epsilon.$$

De plus on a: $T_{\alpha} x = \zeta$, uniformément sur tout cocompact de \mathbf{R} , d'où

$$\sup_{\|t\| \leq m} \|x(t + \alpha_n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup_{\|t\| \leq m} |\zeta(t)|.$$

$$\text{Donc } \|y(t)\| \leq \sup_{\|t\| \leq m} |\zeta(t)| + \epsilon \leq \|\zeta\| + \epsilon.$$

Ceci pour tout t et tout $\epsilon > 0$, d'où $\|y\| \leq \|\zeta\|$, et ceci pour tout ζ avec $T_g \zeta = \zeta$ et $\zeta \subseteq K$, d'où $y = \underline{x}_g$, donc $T_{\alpha} \underline{x}_f = \underline{x}_{T_{\alpha} f}$.

Soient α' et β' deux suites réelles quelconques. D'après ce qui précède, il existe deux sous-suites $\alpha \subseteq \alpha'$ et $\beta \subseteq \beta'$: $T_{\alpha + \beta} \underline{x}_f = \underline{x}_{T_{\alpha + \beta} f}$.

f étant presque-périodique en t , uniformément par rapport à x , il existe deux sous suites de α et β qu'on note encore α et β telles que $T_{\alpha + \beta} f = T_{\alpha} T_{\beta} f$ donc $T_{\alpha + \beta} \underline{x}_f = \underline{x}_{T_{\alpha} T_{\beta} f}$.

De meme, il existe deux sous-suites encore notées α et β telles que $\underline{x}_{T_{\alpha} T_{\beta} f} = T_{\alpha} T_{\beta} \underline{x}_f$.

En résumé: Pour deux suites α' et β' quelconques, il existe deux sous-suites extraites α et β telles que $T_{\alpha + \beta} \underline{x}_f = T_{\alpha} T_{\beta} \underline{x}_f$, avec une convergence simple. D'après le théorème de Bochner \underline{x}_f est. p.p.

Corollaire 1: $\text{mod}(\underline{x}_f) \subseteq \text{mod}(f)$.

Soit α' telle que $T_{\alpha'} f = f$. Il existe une sous-suite telle que

$$T_{\alpha'} \underline{x}_f = \underline{x}_f$$

D'après (Fink [3b, page 61]) on a $\text{mod}(\underline{x}_f) \subseteq \text{mod}(f)$.

REFERENCES

1. Busenberg, S.N. Periodic solutions of delay differential equations in some models of epidemics, pp. 67-78 in Lakshmikantham [5].
2. Cooke, K. L.: A periodicity threshold theorem for epidemics and population growth. *Math. Biosci.* 91 (1976) 87-104.
3. (a) Fink, A. M., Gatica, J. M. Positive Almost periodic solutions of some delay integral equation, *J.D.E.* 83, 166-178 (1990).
 (b) Fink, A. M. Almost periodic differential equations. Springer Lecture Notes in Mathematics #377 (1974).
4. Nussbaum, R. A periodicity threshold theorem for some non-linear integral equations. *Math. Biol.* 4, 69-80 (1977).
5. Lakshmikantham, V. Leela, S: Differential and integral inequalities, 2 vols. Acad. Press, (1969).
6. Kurihara, Mitsunobu. Quasiperiodic solutions of quasiperiodic differential difference equations (to appear).
7. Zaidman, S. Solutions of abstract differential equations with minimal uniform norm. *Libertas Mathematica*, Vol. 3, (1983).
8. Yoshizawa, T: Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions, Springer Verlag (1975).

