LIBERTAS MATHEMATICA ,VOL. 9 (1989)

LES ALGEBRES BORNOLOGIQUES STELLAIRES

M.Akkar , A.Beddad ,M.Oudadess

I . INTRODUCTION :

G.R. Allan, H.G. Dales et J.P. Mc Clure ont introduit dans ([2]), les pseudo-Banach algebras ramenant -dans l'optique de E.H. Arnold ([3]), L.Waelbroeck ([16]) et J.S. e Silva ([14])- à la notion de borné l'étude spectrale d'une large classe d'algèbres que l'on rencontre souvent en analyse fonctionnelle. M. Akkar ([1]) et H. Hogbe-Nlend ([9]), reprennent l'étude de cette notion sous l'appellation algèbres bornologiques multiplicativement convexes (a.b.m.c). Le dernier auteur reconnaît parmi celles-ci la sous-classe des algèbres bornologiques stellaires (a.b.s)([9]). Il a regardé les a.b.s complètes comme elles sont définies, c'est-à-dire comme limite inductive bornologique de C^*-algèbres. Les techniques utilisées sont les mêmes pour les a.b.m.c involutives et les résultats paraissent souvent inachevés , vu la très grande richesse des C^*-algèbres

Nous munissons les a.b.s complètes d'une norme d'algèbre stellaire. Cette norme n'est pas toujours complète et permet de traiter aisément de toutes les questions classiques sur ces algèbres. Nous regardons sa complétude et traitons des théorèmes du type Gelfand-Naimark. Nous obtenons que toute a.b.s. complète, commutative et unitaire s'injecte bornologiquement dans une algèbre C(K) de fonctions continues sur un compact K. Si la norme d'a.b.s est complète, elle est algébriquement une algèbre C(K) ; et si en plus elle est à réseau alors c'est une C^*-algèbre (théorème 1) .

Nous donnons des exemples d'a.b.s complètes dont la norme d'a.b.s n'est pas complète et construisons un exemple où celle-ci est complète. Ce dernier exemple permet de voir qu'on n'a pas unicité de structure d'a.b.s complète dans une algèbre commutative. Il montre aussi qu'il existe des morphismes d'a.b.s non bornés ce qui n'est pas le cas pour les C^*-algèbres. Enfin, c'est un exemple d'une algèbre bornologique complète non à réseau.

Nous améliorons le calcul fonctionnel construit dans ([9]) par H. Hogbe-Nlend pour $\tilde{C}(K)$ l'algèbre des germes de fonctions continues au voisinage du spectre K de x, en l'étendant à la C^*-algèbre C(K) des fonctions continues sur K.

En section VII, nous regardons les morphismes d'a.b.s et obtenons que tout morphisme d'une a.b.s complète dans une autre est non expansif pour les normes d'a.b.s , si le morphisme est de plus injectif, alors c'est une isométrie (théorème 3). Curieusement un morphisme d'a.b.s n'est pas forcément borné (au sens bornologique) comme nous l'avons déjà signalé.

Enfin en section VIII, nous nous intéressons au problème de la complétion bornologique des a.b.s. Nous montrons que, dans cette classe qui a pourtant de très bonnes propriétés, la complétion n'est pas toujours possible ; nous donnons une caractérisation de celles qui sont complétables (Proposition 8).

II - PRELIMINAIRES : (Algèbres bornologiques)

1- Soit E une algèbre (associative) sur K ($K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une bornologie vectorielle sur l'espace vectoriel E est dite une bornologie d'algèbre si la multiplication $(x,y) \longrightarrow xy$ de $E \times E$ dans E est bornée.

2- Un système inductif d'algèbres bornologiques (resp. unitaires) est un système inductif (E_i, π_{ji}) d'algèbres (resp. unitaires) indexé par un ensemble filtrant à droite tel que les E_i soient des algèbres bornologiques (resp. unitaires) et les π_{ji} des morphismes d'algèbres bornologiques (resp. unitaires).

3- Les algèbres bornologiques multiplicativement convexes (a.b.m.c) : Nous introduisons les a.b.m.c par un théorème de structure ([9]). Pour les définitions se reporter aussi à ([9]).

Une a.b.m.c (resp. séparée, resp. complète) est une limite inductive bornologique d'algèbres semi-normées (resp. normées, resp. de Banach).

4 - Les algèbres bornologiques stellaires (a.b.s)

Une algèbre involutive d'involution $*$ est dite semi-normée stellaire si elle est munie d'une semi-norme d'algèbre p vérifiant : $p(xx^*) = (p(x))^2$, pour tout x.

Une a.b.s (resp. séparée, resp. complète) est une limite inductive bornologique d'algèbres semi-normées stellaires (resp. normées stellaires, resp. de $\mathbb{C}^*$-algèbres).

Nous ne considérons que des algèbres unitaires vu qu'on

peut toujours se ramener à ce cas par adjonction bornologique d'une unité ([9]).

Pour les résultats fondamentaux sur la bornologie et les algèbres bornologiques, se reporter à ([8]) et ([9]).

III - PROPRIETES FONDAMENTALES DES a.b.s :

Nous résumons les propriétés fondamentales des a.b.s dans la:

Proposition 1 : Soit $E = \varinjlim (E_i, f_{ji})$ une a.b.s complète. Alors :

a) Les f_{ji} sont des isométries i.e $||x||_i = ||x||_j$ pour $i \leq j$;

b) Pour tout x dans E, $Spx = Sp_i x$ pour tout $i \in I(x)$; où $I(x) = \{ i : x \in E_i \}$ (Invariance du Spectre) ;

c) E peut être munie d'une norme d'algèbre telle que $||xx^*|| = ||x||^2$ pour tout x dans E (cette norme sera dite la norme d'a.b.s de E).

Preuve : a) Les f_{ji} sont des injections canoniques donc des morphismes injectifs d'algèbres. D'après la proposition 1.37, page 7 et la proposition 1.8.1., page 16 de [5] ce sont des isométries.

b) En tenant compte de a), E_i est une sous-$\mathbb{C}^*$-algèbre de E_j pour $i \leq j$, et donc en est une sous-algèbre pleine ([5] , proposition en page 8). Il s'en suit que $Sp_i x = Sp_j x$, pour tout $(i,j) \in I(x) \times I(x)$. Mais l'on sait que pour une a.b.m.c unitaire et complète, on a ([9], lemme II.2.1) $Spx = \bigcap_{i \in I(x)} Sp_i x$ pour tout x .

c) Grâce à a), on définit une norme sur E en posant : $||x|| = ||x||_i$, pour $i \in I(x)$. Cette norme remplit toutes les conditions requises.

Comme conséquences immédiates, nous avons :

1 - Si x est un élément normal (i.e $xx^* = x^*x$) de E on a $\rho(x) = \rho_i(x) = ||x||_i = ||x||$, pour tout $i \in I(x)$, où $\rho(x)$ désigne le rayon spectral de x ($\rho(x) = \sup_{\lambda \in Spx} |\lambda|$).

2 - Toute a.b.s complète commutative E est semi-simple. En effet : $\text{Rad } E = \{x : \rho(x) = 0\} = \{x : ||x|| = 0\} = \{0\}$.

Nous obtenons maintenant la propriété de permanence du Spectre.

Proposition 2 : *Soit E une a.b.s complète unitaire et F une sous-a.b.s unitaire complète. Alors :*

$$Sp_E x = Sp_F x \quad , \text{ pour tout } x \text{ dans } F .$$

Preuve : On a $F = \varinjlim F_i$, où $F_i = F \cap E_i$. F_i est une sous C^*-algèbre de E_i . Donc :

$$Sp_E x = Sp_{E_i} x = Sp_{F_i} x \quad , \text{ pour tout } i \in I(x).$$

IV - COMPLETUDE DE LA NORME D'a.b.s :

Une a.b.s complète n'est pas, en général, complète pour sa norme d'a.b.s comme nous allons le voir.

Donnons d'abord quelques résultats sur les a.b.m.c .

Proposition 3 : *Soient* $E = \varinjlim_{i \in I} E_i$ *une a.b.m.c complète commutative, semi-simple et à réseau ; et* $\| \ \|$ *une norme d'algèbre sur E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1/ La norme $\| \ \|$ *est complète*

2/ La bornologie β *de E est identique à celle définie par la norme i.e* $\beta = \beta_{\| \cdot \|}$

3/ Il existe $i_0 \in I$ *tel que* $E = E_{i_0}$ *algébriquement et bornologiquement et* $\| \ \|$ *est équivalente à* $\| \ \|_{i_0}$.

Preuve : $1/ \Longrightarrow 2/$. *Si la norme* $\| \ \|$ *est complète,* $\beta_{\| \ \|}$ *est une bornologie d'a.b.m.c complète et à réseau. D'après ([9], corollaire 1, page 26), on a :* $\beta = \beta_{\| \ \|}$.

$2/ \Longrightarrow 3/$. *Si* $\beta = \beta_{\| \ \|}$, *alors la boule unité B de* $\| \ \|$ *est un borné de* β , *et donc il existe* $i_0 \in I$ *tel que B est contenu dans* E_{i_0} *et y est borné. Mais alors* $E = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda B \subset E_{i_0}$. *Donc* $E = E_{i_0}$. *Et comme* $B \in \beta_{\| \ \|_{i_0}}$, *on a* $\beta_{\| \ \|} \subset \beta_{\| \ \|_{i_0}}$. *D'où* $\beta \subset \beta_{\| \ \|_{i_0}}$. *Or* $\beta_{\| \ \|_{i_0}} \subset \beta$ *par définition de la bornologie* β. *Donc* $\beta = \beta_{\| \ \|} = \beta_{\| \ \|_{i_0}}$.

D'où le résultat.

$3/ \Longrightarrow 1/$ *Evidente, puisque les* $\| \ \|_i$ *sont complètes*

Corollaire 1 : *Soit* $E = \varinjlim_{i \in I} E_i$ *une a.b.m.c complète commutative, semi-simple et à réseau telle que* $E_i \subsetneq E$ *pour tout* $i \in I$. *Alors E n'admet aucune norme d'algèbre complète.*

Corollaire 2 : *Soit E une a.b.m.c complète commutative et à réseau. Si E est isomorphe algébriquement à une algèbre C(K), alors E est une algèbre de Banach .*

Preuve : *E étant isomorphe algébriquement à $C(K)$, elle est semi-simple et admet une norme d'algèbre complète (celle de la convergence uniforme sur K). D'où le résultat par la proposition 3.*

Dans le cas des a.b.s , nous avons :

Corollaire 3 : *Soit $E = \varinjlim_{i \in I} E_i$ une a.b.s complète commutative et à réseau. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1°/ La norme d'a.b.s $\| \ \|$ est complète.

2°/ La bornologie de E coïncide avec celle de la norme.

3°/ Il existe $i_0 \in I$ tel que $E = E_0$ et $\|x\| = \|x\|_{i_0}$ pour tout x.

Preuve : *Par la proposition 3 et le fait que E est semi-simple.*

Remarque 1 : *Soit $E = \varinjlim E_n$ une a.b.s complète non nécessairement commutative telle que $E_n \subsetneq E$ pour tout n. En utilisant le théorème A page 16 de ([7]), on montre que la norme d'a.b.s n'est pas complète.*

V - THEOREMES DU TYPE GELFAND-NAIMARK :

Dans cette section, nous dégageons le lien entre les a.b.s complètes et les algèbres de fonctions. Nous améliorons le théorème du type Gelfand-Naïmark donné dans ([9]).

Proposition 4 : *Toute a.b.s commutative unitaire et complète (E, β) s'injecte bornologiquement dans une algèbre $C(K)$ de fonctions continues sur un compact K.*

Preuve : *Soient $\| \ \|$ la norme d'a.b.s de E et K l'espace compact de ses caractères non nuls. La transformation de Gelfand g est une isométrie de $(E, \| \ \|)$ dans $(C(K), \| \ \|_\infty)$. En effet : pour tout x de E on a :*

$$\|g(x)\|_\infty = \sup_{X \in K} |g(x)(X)| = \sup_{X \in K} |X(x)| = \rho(x) = \|x\| .$$

Comme $\beta \subset \beta_{\| \ \|}$, *on a que g est une injection bornée de (E, β) dans $(C(K), \| \ \|_\infty)$.*

Proposition 5 : *Soit E une a.b.s commutative unitaire et complète. Alors : la transformation de Gelfand g de E dans C(K) est surjective si, et seulement si, la norme d'a.b.s de E est complète.*

Preuve : *On a pour tout x de E : $\|g(x)\|_\infty = \|x\|$. Si g est surjective alors $(E, \| \ \|)$ et $(C(K), \| \ \|_\infty)$ sont isométriquement isomorphes. D'où $\| \ \|$ est complète. Réciproquement, si la norme $\| \ \|$ est complète, par l'égalité $\|g(x)\|_\infty = \|x\|$ pour tout x, on a g(E) qui est fermée dans $(C(K), \| \ \|_\infty)$. Or g(E) contient les constantes (puisque E est unitaire), sépare les points sur K et est stable par conjugaison car tout caractère de E est hermitien. Par le théorème de Stone-Weierstrass on a g(E) = C(K) .*

Proposition 6 : *Soit E une a.b.s complète commutative unitaire et dont la norme d'a.b.s est complète. Alors E est à réseau si, et seulement si, elle est isomorphe algébriquement et bornologiquement à C(K), où K est l'espace des caractères non nuls de E.*

Preuve : *La condition suffisante est évidente puisque C(K) est à réseau. Montrons la condition nécéssaire : Comme la norme d'a.b.s* est complète, E est isomorphe algébriquement à $C(K)$ par la proposition 5. Et comme E est à réseau, on montre, comme dans le corollaire 2, que E est une $\mathbb{C}^*$-algèbre. On conclut alors par le théorème de Gelfand-Naïmark.

Donnons maintenant un théorème du type Gelfand-Naïmark.

Théorème 1 : *Soit E une a.b.s complète commutative unitaire et dont la norme d'a.b.s est complète. Alors :*

1°/ E est algébriquement une algèbre $C(K)$ de fonctions continues sur un compact.

2°/ Si E est de plus à réseau, alors E est une $\mathbb{C}^*$-algèbre.

VI - EXEMPLES ET APPLICATIONS :

1°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathbb{C}^n$ muni des lois de compositions habituelles qui en font une algèbre, de la norme Sup et de l'involution $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, c'est une $\mathbb{C}^*$-algèbre. On identifie $\mathbb{C}^n$ à l'ensemble $\mathbb{C}^n_\circ$ des suites complexes, nulles à partir du rang $(n+1)$, alors $E = \bigcup_n \mathbb{C}^n_\circ$ munie de la bornologie limite inductive des $\mathbb{C}^*$-algèbres $\mathbb{C}^n_\circ$ est une a.b.s complète. Elle n'est pas complète pour sa norme d'a.b.s. En fait, d'après le corollaire 1, E n'admet aucune norme d'algèbre complète puisque E est à réseau car elle est complète et à base dénombrable de bornologie ([9]).

2°/ Soient X un espace localement compact, non compact métrisable et dénombrable à l'infini i.e $X = \bigcup_{n \geq 0} K_n$ où $(K_n)_n$ est une suite de compacts de X vérifiant $K_n \subset \overset{\circ}{\widehat{K_{n+1}}}$, pour tout $n \geq 0$, $K(X)$

l'algèbre des fonctions complexes continues et à support compact et $K(X,K_n)$ la sous- algèbre de $K(X)$ des fonctions à support contenu dans K_n. Munie de la norme Sup et de l'involution $f \longrightarrow \bar{f}$ est une $\mathbb{C}^*$-algèbre.

Pour $m \leq n$, désignons par $f_{n,m}$ l'injection canonique de $K(X,K_m)$ dans $K(X,K_n)$. $(K(X,K_n), f_{n,m})$ est un système inductif de $\mathbb{C}^*$-algèbres et $K(X)$ munie de la bornologie limite inductive des $K(X,K_n)$ est une a.b.s complète. Comme $K(X,K_n) \subsetneq K(X)$ pour tout $n \geqslant 0$ et $K(X)$ est à base dénombrable de bornologie donc à réseau ([9]), $K(X)$ n'admet aucune norme d'algèbre complète. En particulier sa norme d'a.b.s est non complète.

3°/ Exemple d'une a.b.s complète dont la norme d'a.b.s est complète.

Soit Ω le plus petit ordinal non dénombrable. On désigne par $W = [0,\Omega[$ l'ensemble des ordinaux inférieurs à Ω. Muni de la topologie de l'ordre ([6]), W est un espace localement compact non compact.

a) L'algèbre $K(W,[0,\alpha])$:

Soit α un ordinal dénombrable. Notons par $K(W,[0,\alpha])$ l'ensemble des fonctions complexes continues sur W et à support contenu dans $[0,\alpha]$; où $[0,\alpha]$ est l'ensemble des ordinaux inférieurs ou égaux à α, c'est un compact pour la topologie de W. On munit $K(W, [0,\alpha])$ des opérations usuelles de l'involution $f \longrightarrow \bar{f}$ et de la norme $\|f\|_\alpha = \sup_{\sigma \in [0,\alpha]} |f(\sigma)|$. Elle devient une $\mathbb{C}^*$-algèbre.

b) L'algèbre $K(W)$:

Si on désigne par $f_{\beta\alpha}$ l'injection canonique de $K(W,[0,\alpha])$

dans $K(W, [0,\beta])$ pour $\alpha \leq \beta$, $(K(W, [0,\alpha]), f_{\alpha\beta})$ est un système inductif de $\mathbb{C}^*$-algèbres. On a algébriquement $K(W) = \varinjlim K(W, [0,\alpha])$; où $K(W)$ désigne l'algèbre des fonctions sur W et à support compact. Munie de la bornologie limite inductive des $\mathbb{C}^*$-algèbres $K(W, [0,\alpha])$, $K(W)$ est une a.b.s complète ; sa norme d'a.b.s est donnée par : $\|f\| = \operatorname{Sup}_{\alpha \in W} |f(\alpha)|$, $f \in K(W)$.

c) Complétude de la norme d'a.b.s

Comme toute fonction continue sur W est constante à partir d'un certain ordinal ([6]). On a $K(W) = C_0(W)$ où $C_0(W)$ est l'algèbre des fonctions continues sur W et nulles à l'infini. Donc $K(W)$ munie de sa norme d'a.b.s est exactement l'algèbre de Banach $C_0(W)$ munie de la norme Sup.

Remarques : 1°/ Pour tout ordinal dénombrable , $K(W, [0,\alpha]) \subsetneq K(W)$. En effet :

Soit α un ordinal dénombrable. Les ensembles $[0,\alpha+1]$ et $[\alpha+2,\Omega[$ sont deux fermés disjoints de W, où $\alpha+1$ désigne le successeur de α et $\alpha+2$ celui de $\alpha+1$. Comme W est un espace normal ([6]), il existe une fonction continue sur W prenant 1 sur $[0,\alpha+1]$ et nulle sur $[\alpha+2,\Omega[$. Donc f est à support contenu dans le compact $[0,\alpha+1]$ et non dans $[0,\alpha]$. D'où le résultat.

2°/ $K(W)$ n'est pas à réseau, car sinon il existerait, d'après la proposition 3, un ordinal dénombrable α tel que : $K(W) = K(W, [0,\alpha])$.

3°/ La bornologie β de $K(W)$ est strictement plus fine que celle de la norme d'a.b.s $\| \ \|$ i.e $\beta \subsetneq \beta_{\| \ \|}$. En effet.

Nous avons toujours $\beta \subset \beta_{\|\ \|}$. *Si* $\beta = \beta_{\|\ \|}$ *alors* $K(\mathcal{U})$ *serait à réseau car* $\|\ \|$ *est complète.*

VI - CALCUL FONCTIONNEL :

Nous améliorons le calcul construit dans ([9]) .

Théorème 2 : *Soit* $E = \varinjlim E_i$ *une a.b.s complète unitaire et* x *un élément normal de* E, *de spectre* K. *Alors, il existe un morphisme d'a.b.s , unique* θ *de* $C(K)$ *dans* E *tel que* $\theta(Z) = x$, *où* Z *est la fonction* $\lambda \longrightarrow \lambda$ *sur* K. *De plus* $\|f\| = \|\theta(f)\|$ *pour tout* $f \in C(K)$, *où* $\|\theta(f)\|$ *est la norme d'a.b.s de* $\theta(f)$.

Preuve : *Soit* $f \in C(K)$. *On a vu que* $K = Sp_i x$ *pour tout* $i \in I(x)$. *Soit* θ_i *le calcul fonctionnel pour la* $\mathbb{C}^*$*-algèbre* E_i ([5], *proposition 5 page 68)* $\theta_i(f)$ *est indépendant de* i *car* $Sp_i x = Sp_j x$ *pour tout* $(i,j) \in I(x) \times I(x)$ *et de plus* θ_i *et* θ_j *coïncident sur les polynômes en* Z *et* $\bar{Z}$ *qui sont denses dans* $C(Sp_i x) = C(Sp_j x)$. *Si l'on pose* $\theta(f) = \theta_i(f)$ *pour* $i \in I(x)$, *alors* θ *est le morphisme cherché.* $\theta(f)$ *sera noté* $f(x)$.

Maintenant, si $x \in E_i$, *on a* $f(x) = \theta(f) = \theta_i(f)$, *donc :* $\|f\| = \|f(x)\|_i$ ([5], *page 69). Or par définition de la norme d'a.b.s on a* $\|f(x)\|_i = \|f(x)\|$. *D'où* $\|f\| = \|f(x)\|$.

Remarque : *Suivant une suggestion de L. Waelbroeck* ([15]), *nous obtenons le théorème 2 à partir du résultat de* [9] *comme suit :*

Si on désigne par $\tilde{C}_0(K)$ *l'algèbre des germes de fonctions continues au voisinage de* K *et nulles sur* K, *on montre que* $C(K)$ *est bornologiquement isomorphe à* $\tilde{C}(K)/\tilde{C}_0(K)$ *quand* $\tilde{C}(K)$ *est munie de sa bornologie naturelle. Soit* ϕ *cet isomorphisme.*

Si $f \in C(K)$, $\phi(f) \in \tilde{C}(K)/\tilde{C}_0(K)$. *On définit* θ_x *de* $C(K)$ *dans* E *par :* $\theta_x(f) = \Psi_x(g)$ *où* Ψ_x *et le calcul fonctionnel construit par H. Hogbé-Nlend et* g *un représentant quelconque de* $\phi(f)$. θ_x *est bien défini et il coïncide avec* θ *du théorème précédent.*

Comme l'a fait remarqué L. Waelbroeck ([15]) $\check{C}(K)$ *n'est pas séparée. L'algèbre bornologique séparée associée est justement l'algèbre* $C(K)$.

VII - MORPHISMES D'a.b.s :

Nous passons maintenant à l'étude des morphismes.

Théorème 3 : *Soient* E *et* F *deux a.b.s complètes et* ψ *un morphisme d'a.b.s de* E *dans* F. *Alors :*

(i) $\|\psi(x)\| \leq \|x\|$, *pour tout* x *dans* E ;

(ii) Si de plus, ψ *est injectif alors c'est une isométrie.*

Preuve : *(i) Pour une norme d'a.b.s on a :*

$\|h\| = \rho(h)$, *pour tout* h *hermitien et*

$$\|xx^*\| = \|x\|^2 \quad \text{pour tout } x.$$

Alors :

$$\|\psi(x)\|^2 = \|\psi(x)(\psi(x))^*\| = \|\psi(xx^*)\| = \rho(\psi(xx^*)).$$

Or : $(\rho(xx^*)) \leq \rho(xx^*) = \|x^*x^*\| = \|x\|^2$.

(ii) On a : $E = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, E_i$, E_i est une $\mathbb{C}^*$-algèbre. Posons $\Psi_i = \Psi/_{E_i}$. Vu que F est en particulier une algèbre normée involutive on a :

$\|\Psi(x)\| = \|\Psi_i(x)\| \geq \|x\|_i$ pour tout $i \in I(x)$ ([5], proposition 1.8.1. page 16) et l'on a vu que $\|x\| = \|x\|_i$.

Proposition 7 : Soient E et F deux a.b.s complètes et Ψ un morphisme d'a.b.s injectif de E dans F. Alors $\Psi(E)$ est une a.b.s complète.

Preuve : Posons $\Psi_i = \Psi/_{E_i}$. Alors $\Psi_i(E_i)$ est une $\mathbb{C}^*$-algèbre.
En effet :
Soit F la $\mathbb{C}^*$-algèbre obtenue en complétant (F, $\| \ \|$). On peut considérer Ψ_i comme un morphisme de E_i dans F. Il est injectif donc isométrique d'après le théorème précédent.

Maintenant, pour $i \leq j$, on a $\Psi_i(E_i) \subset \Psi_j(E_j)$. Notons par h_{ji} l'injection canonique de $\Psi_i(E_i)$ dans $\Psi_j(E_j)$. Les $\Psi_i(E_i)$ sont tous munis de la norme induite par la norme d'a.b.s de F. Il est facile de voir que $\Psi(E) = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}(\Psi_i(E_i), h_{ji})$ bornologiquement. En fin, les h_{ji} sont injectives donc $\Psi(E)$ est complète.

Remarque 3 : Nous savons qu'un morphisme involutif Ψ de E dans F où E et F sont des $\mathbb{C}^*$-algèbres est borné. On a même $\|\Psi(x)\| \leq \|x\|$. Nous venons de voir (théorème 3) que c'est encore vrai si E et F sont des a.b.s complètes et munies de leurs normes d'a.b.s.

Cependant, il existe des morphismes d'a.b.s non bornés au sens bornologique comme le montre le :

Contre-exemple : *Considérons $K(W)$ de l'exemple 3°/ de VI. On a vu que C'est une a.b.s complète et que sa norme d'a.b.s $\| \ \|$ est complète. On a vu aussi que $\beta \subsetneq \beta_{\| \|}$ où β est sa bornologie. Alors l'application identique de la C^*-algèbre $(K(W), \| \ \|)$ dans $(K(W), \beta)$ est un morphisme non borné.*

VIII - COMPLETION DES a.b.s SEPAREES :

Dans ([8]) H. Hogbé-Nlend a défini le complété bornologique d'un espace bornologique convexe (e.b.c) séparé E comme suit : E peut s'écrire comme limite inductive d'espaces normés E_i : $E = \varinjlim(E_i, \pi_{ji})$ Son complété est l'e.b.c séparé associé à l'e.b.c $\check{E} = \varinjlim(\hat{E}_i, \hat{\pi}_{ji})$; où $\hat{E}_i$ est le complété de l'espace normé E_i et $\hat{\pi}_{ji}$ le prolongement de π_{ji} à $\hat{E}_i$.

Dans ce qui suit, nous montrons qu'une a.b.s séparée n'est pas nécessairement injectable dans une a.b.s complète et nous donnons une condition nécéssaire et suffisante pour qu'elle le soit.

Définition : *On dira qu'une a.b.s séparée $E = \varinjlim(E_i, \delta_{ji})$ est complétable si les applications $\hat{\delta}_{ji}$ de $\hat{E}_i$ dans $\hat{E}_j$ sont injectives pour $i \leq j$.*

Remarque 4 : *Les $\hat{\delta}_{ji}$ étant injectives, on voit alors que la complétée de E est $\tilde{E} = \varinjlim(\hat{E}_i, \hat{\delta}_{ji})$ qui est une a.b.s complète et E s'injecte bornologiquement dans $\tilde{E}$.*

Nous caractérisons maintenant les a.b.s qui sont complétables.

Proposition 8 : *Soit* $E = \varinjlim_{i \in I} (E_i, f_{ji})$ *une a.b.s séparée. Alors* E *est complétable si, et seulement si,* $\|x\|_i = \|x\|_j$ *pour tout* i, j *dans* $I(x)$.

Preuve : *Nécessité : Si* E *est complétable, elle s'injecte dans* $\check{E} = \varinjlim(\hat{E}_i, \hat{f}_{ji})$ *qui est une a.b.s complète. D'après la proposition 1, on a* $|x|_i = |x|_j$ *pour tout* i *et tout* j *tels que* $x \in E_i \cap E_j$, *où* $|x|_i$ *désigne la norme de* x *dans* E_i. *Donc on a en particulier* $\|x\|_i = \|x\|_j$ *pour tout* i, j *dans* $I(x)$.

Suffisance : Comme $\|x\|_i = \|x\|_j$ *pour* $i \leq j$, *les injections* f_{ji} *de* E_i *dans* E_j *vérifient la condition de Robertson* ([8]). *Donc les prolongements* $\hat{f}_{ji}$ *de* $\hat{E}_i$ *dans* $\hat{E}_j$ *sont aussi injectives. D'où* E *est complétable.*

Remarque 5 : *Si* E *est une a.b.s séparée et complétable, on peut définir, comme dans le cas complet, une norme d'algèbre stellaire.*

Exemples :

1°/ Exemples d'une a.b.s séparée complétable :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Considérons* $E_n = E_s^\circ([-n,n])$ *l'ensemble des fonctions en escalier sur* $\mathbb{R}$ *et nulles en dehors de* $[-n,n]$. *Muni des opérations habituelles,* E_n *est une algèbre. On la munit de la norme* $\| \ \|_n$ *de la convergence uniforme sur* $[-n,n]$ *et de l'involution* $f \longrightarrow \bar{f}$. *Alors* $(E_n, \| \ \|_n)$ *est une algèbre normée stellaire. Si* $f_{n,m}$ *désigne l'injection canonique de* E_m *dans* E_n *pour* $m \leq n$, *alors* $(E_n, f_{n,m})$ *est un système inductif d'algèbres normées stellaires. Soit* $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$. *L'algèbre* E *munie de la bornologie limite inductive des* E_n *est une a.b.s séparée. Elle est complétable car on a :*

$$\|f\|_n = \|f\|_m \text{ pour tout } f \in E_m \text{ , } m \leq n$$

Montrons maintenant que E n'est pas complète.

Comme la topologie induite par E_{n+1} sur E_n coïncide avec celle de E_n et que E_n est fermée dans E_{n+1}, on a d'après ([4]) la bornologie de $E = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}_{bor}\, E_n$ est exactement la bornologie de Von Neumann de l'algèbre localement convexe E munie de la topologie limite inductive des E_n. Donc pour montrer que E est non complète, il faut et il suffit de montrer que $E = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}_{top}\, E_n$ n'est pas bornologiquement complète, ce qui est équivalent à dire par ([10]) qu'il existe une suite Mackey-Cauchy qui n'est pas topolgiquement convergente.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-n,n]$. Il existe une suite $(f_p)_{p \geq 1}$ dans E_n qui converge uniformément vers f, donc $(f_p)_{p \geq 1}$ est Mackey-Cauchy qui ne converge pas topologiquement. D'où le résultat.

2°/ Exemple d'une a.b.s non complètable :

Soit $E = \{P : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C},\ P \in \mathbb{C}[X]\}$. On munit E des opérations usuelles.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons E_n l'algèbre E munie de la norme $\|P\|_n = \operatorname{Sup}_{x \in [0,1/n]} |P(x)|$ et de l'involution définie par :

$$P^*(X) = \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 X + \dots + \bar{\alpha}_n X^n \quad \text{si } P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n$$

Alors $(E_n, \|\ \|_n)$ *est une algèbre normée stellaire, pour tout* n.
Si on désigne par $f_{n,m} : E_m \longrightarrow E_n$ *l'application identique pour* $m < n$, $(E_n, f_{n,m})$ *est un système inductif d'algèbres normées stellaillaires. Alors* $E = \varinjlim (E_n, f_{n,m})$ *est une a.b.s séparée. Elle n'est pas complète car* E *ne peut être munie d'aucune structure d'a.b.m.c complète à cause de l'existence des éléments à spectre non borné.*

E *n'est pas complétable car pour tout* $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, *avec* $n \neq m$ *on a :* $\|x\|_n = \frac{1}{n} \neq \frac{1}{m} = \|x\|_m$

Donc les prolongements $\hat{f}_{n,m}$ *des* $f_{n,m}$ *aux complétées* E_n *ne sont pas toutes injectives.*

Remarque finale : *L'étude des a.b.s complètes est grandement simplifiée par l'introduction d'une norme. Le même phénomène se présente dans le cas des algèbres uniformément localement A-convexes où l'étude est ramenée à celle d'une algèbre normée ([11], [12], [13]).*

R E F E R E N C E S

°+°+°+°+°+°+°+°+°+°+°+°+

[1] M. AKKAR : "Théorèmes de structure de certaines algèbres topologiques ou bornologiques et applications". C.R.A.S., Paris, t. 285 (1977) Série A 549-552.

[2] G.R. ALLAN, H.G. DALES, J.P. Mc CLURE : "Pseudo-Banach algebras" Studia Math, t. XL (1971) 55-69.

[3] B.H. ARNOLD : "Rings of operators on vector spaces". Annals of Math Vol 45, n° 1 Jan 1944.

[4] C.D. BIERSTEDT : "An introduction to locally convex inductive limits" ICPAM, Autumn School Nice France September (1986).

[5] J. DIXMIER : "Les $\mathbb{C}^*$-algèbres et leurs représentations" Gauthier-Villars, 2ème édition (1974).

[6] L. GILLMAN et M. JERISON : "Rings of continuous fuctions" Van Nostrand Reimhold New-York (1960).

[7] A. GROTHENDIECK : "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires". Memoirs of Amer. Math Soc. n° 16 (1955).

[8] H. HOGBE-NLEND : "Théories des bornologies et applications" Springer Lectures notes, 213 (1972).

[9] H. HOGBE-NLEND : "Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques". Bol. Soc. Brasil Mat. 3 (1972), 19-56.

[10] H. HOGBE-NLEND : "Bornologies and functional analysis" North-Holland (1976).

[11] M. OUDADESS : "Théorème de structure et propriétés fondamentales des algèbres uniformément localement A-convexes". C.R.A.S., Paris, t. 296 (1983) série I, 851-853.

[12] M. OUDADESS: "Continuité des caractères dans les algèbres uniformément A-convexes". Ann. Sc. Math. Québec 1983, Vol. VII, n° 2, 193-201.

[13] M. OUDADESS : "Une norme d'algèbre de Banach dans les algèbres uniformément localement A-convexes". Afrika Matematika Vol IV (1987) 15-22.

[14] I.S.E SILVA : " Sur la calcul symbolique d'opérateurs permutables". Annale de Math pura e app (1962) 219-276.

[15] L. WAELBROECK : "Communication privée"

[16] L. WAELBROECK : "Etude des algèbres complètes "Mém. Acad. Roy. Belgique, Cl des Sc, 31 (1960).