

## SUR LES ESPACES DE SOBOLEV PERIODIQUES

Ioana Cioranescu

On presente quelque extensions du théorème de Riesz-Fischer aux espaces de distributions de Sobolev periodiques ainsi qu'une application au problème de Dirichlet pour le circle.

On commence par rappeler quelques résultats de la théorie des distributions qu'on va utiliser dans la suite.

Nous allons considerer le tore  $\mathbf{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et l'espace  $L^p(\mathbf{T}^1)$ ,  $1 < p < +\infty$ . Pour  $f \in L^p(\mathbf{T}^1)$  les coefficients de Fourier sont :

$$C_n(f) = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On note par  $D'(\mathbf{T}^1)$  l'espace des distributions sur le tore. Pour toute  $T \in D'(\mathbf{T}^1)$  on peut définir les coefficients de Fourier :

$$C_n(T) = T(e^{-2\pi i n t}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Pour  $m \in \mathbb{N}$  on pose :

$$W^{m,p}(\mathbf{T}^1) = \{ f \in L^p(\mathbf{T}^1); \|f\|_{m,p} = \sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_p < +\infty \}.$$

$W^{m,p}(\mathbf{T}^1)$  est un espace de Banach le dual du quel est noté par  $W^{-m,q}(\mathbf{T}^1)$ , ou  $q = \frac{p}{p-1}$ .

On a :

$$L^q(\mathbf{T}^1) \subset W^{-m,q}(\mathbf{T}^1) \subset D'(\mathbf{T}^1).$$

Les espaces  $W^{m,p}(\mathbf{T}^1)$  et  $W^{-m,q}(\mathbf{T}^1)$  sont appellé espaces de Sobolev periodiques de periode 1. Ils sont uniformement convexes.

Finalement, si  $X$  est un espace de Banach et  $X^*$  sont dual, on note par  $\mathcal{J}$  l'application de dualité définie par :

$$\mathcal{J}x = \{ x^* \in X^*; \langle x^*, x \rangle = \|x\| \|x^*\|, \|x\| = \|x^*\| \}.$$

Dans les espaces localment convexes  $\mathcal{J}$  est univalente ( $[2], [3]$ ).

On va utiliser les résultats suivants :

Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$ ; alors la série de Fourier de  $T$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(T) e^{2\pi i n x}$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$  vers  $T$ .

De plus, la série trigonométrique  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{2\pi i n x}$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$  vers une distribution qui admet les  $\gamma_n$  comme coefficients de Fourier si et seulement si la suite  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est à croissance lente, c'est-à-dire, il existe  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel que :

$$\{(1 + |n|)^{-k} \gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}). \quad ([6], \text{Ch. II } \S 1.).$$

Dans le cas de l'espace  $L^p(\mathbb{T}^1)$  on a des résultats beaucoup plus précis; premièrement on a :

pour toute  $f \in L^p(\mathbb{T}^1)$  la série de Fourier  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{2\pi i n x}$  converge dans  $L^p(\mathbb{T}^1)$  vers  $f$ . ([4],[5]).

Ensuite on rappelle les suivants résultats de type Riesz-Fischer.

I. Théorème. Soit  $1 < p \leq 2$ ; on a :

a) si  $f \in L^p(\mathbb{T}^1)$ , alors  $\{C_n(f)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^q(\mathbb{Z})$

b) pour toute suite  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$  il existe  $f \in L^q(\mathbb{T}^1)$  telle que

$\gamma_n = C_n(f)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . ([4],[5],[8]).

II. Théorème. Supposons  $Z = A \cup A'$  avec  $A \cap A' = \emptyset$  et soit  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$

une suite pour laquelle ils existent  $g \in L^p(\mathbb{T}^1)$  et  $h \in L^q(\mathbb{T}^1)$  telles que

$C_n(g) = \gamma_n$  si  $n \in A$  et  $C_n(h) = \gamma_n$  si  $n \in A'$ .

Alors il existe une fonction unique  $f \in L^p(\mathbb{T}^1)$  telle que :

$C_n(f) = \gamma_n$  si  $n \in A$  et  $C_n(\mathcal{F}f) = \gamma_n$  si  $n \in A'$ . (Beurling-Livingston [1]).

Dans la suite on va donner la extension des théorèmes 1 et 2 aux espaces de Sobolev périodiques.

On commence par le

1. Lemme. a)  $T \in W^{-m,q}(\mathbb{T}^1)$  si seulement s'il y a des fonctions

$F_k \in L^q(\mathbb{T}^1)$ ,  $0 \leq k \leq m$  telles que

$$T = \sum_{k=0}^m F_k^{(k)}. \quad (1)$$

b) Si  $f \in W^{m,p}(\mathbb{T}^1)$ , alors sa série de Fourier converge dans  $W^{m,p}(\mathbb{T}^1)$  vers  $f$ .

c) Si  $T \in W^{-m,q}(\mathbb{T}^1)$ , alors sa série de Fourier converge dans  $W^{-m,q}(\mathbb{T}^1)$  vers  $T$ .

Démonstration. a) Cette propriété se démontre comme dans le cas de distributions de Sobolev sur  $\mathbb{R}$ .

b) C'est une conséquence du résultat mentionné plus haut sur la densité de suites trigonométriques dans  $L^p(\mathbb{T}^1)$ .

c) Considérons pour  $T$  la décomposition (1). La série de Fourier de chaque  $F_k$ ,  $0 \leq k \leq m$ , converge dans  $L^q(\mathbb{T}^1)$ , en particulier dans  $W^{-m,q}(\mathbb{T}^1)$ .

Comme l'opérateur de dérivation est continu sur cet espace on voit aisément que le résultat est vrai.  $\square$

2. Proposition. Soit  $1 < p \leq 2$ ; on a :

a) si  $f \in W^{m,p}(\mathbb{T}^1)$ , alors  $\{n^m C_n(f)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^q(\mathbb{Z})$ ;

b) si  $\{n^m \gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ , alors il existe  $f \in W^{m,q}(\mathbb{T}^1)$  telle que  $\gamma_n = C_n(f)$ .

Démonstration. a) C'est une conséquence du Théorème I (a) et de la formule :

$$C_n(f^{(m)}) = (2\pi i n)^m C_n(f), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

b) On voit immédiatement que  $\{n^k \gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$  pour  $0 \leq k \leq m$ . Alors le Théorème I (b) montre que la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{2\pi i n t}$  converge dans  $W^{m,q}(\mathbb{T}^1)$ .

Comme l'espace  $W^{m,q}(\mathbb{T}^1)$  est complet, l'existence de  $f$  avec les propriétés requises s'en suit.  $\square$

3. Proposition. Soit  $1 < p \leq 2$ ; on a :

a) si  $T \in W^{-m,p}(\mathbb{T}^1)$ , alors  $\{(1+in)^{-m} C_n(T)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^q(\mathbb{Z})$ ;

b) si  $\{(1+in)^{-m} \gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ , alors il existe  $T \in W^{-m,q}(\mathbb{T}^1)$

telle que  $C_n(T) = \gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Démonstration. a) Le Lemme 1 montre que

$$C_n(T) = \sum_{k=0}^m (2\pi i n)^k C_n(F_k), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad F_k \in L^p(\mathbb{T}^1), \quad 0 \leq k \leq m. \quad (3)$$

Mais d'après le Théorème I (a) on a :

$$\{C_n(F_k)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{L}^q(\mathbb{Z}), \quad \text{pour } 0 \leq k \leq m.$$

Alors on voit aisément que  $\{(1 + in)^{-m-k} C_n(F_k)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{L}^q(\mathbb{Z})$ , pour  $0 \leq k \leq m$ ,

ainsi que (3) entraîne le résultat.

b) Le Théorème I (b) implique la convergence de la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + in)^{-m} \gamma_n e^{2\pi i n t}$  dans  $L^q(\mathbb{T}^1)$ , donc en particulier dans  $W^{-m,q}(\mathbb{T}^1)$ . Comme l'opérateur différentiel  $(1 + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt})^m$  est continu sur  $W^{-m,q}(\mathbb{T}^1)$ , on obtient que la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{2\pi i n t}$  converge à une distribution  $T \in W^{-m,q}(\mathbb{T}^1)$ . Le résultat est une conséquence de la unicité des coefficients de Fourier des distributions sur le tore.  $\square$

4. Proposition. Supposons  $Z = A \cup A'$  avec  $A \cap A' = \emptyset$  et soit  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  un suite pour laquelle ils existent  $g \in W^{m,p}(\mathbb{T}^1)$  et  $T \in W^{-m,q}(\mathbb{T}^1)$  telle que

$$C_n(g) = \gamma_n \text{ si } n \in A \text{ et } C_n(T) = \gamma_n \text{ si } n \in A'.$$

Alors il existe une fonction unique  $f \in W^{m,p}(\mathbb{T}^1)$  telle que

$$C_n(f) = \gamma_n \text{ si } n \in A \text{ et } C_n(\mathcal{J}f) = \gamma_n \text{ si } n \in A'.$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du Théorème II ainsi qu'on va seulement l'esquissier.

Soit  $V = \{h \in W^{m,p}(\mathbb{T}^1) ; C_n(h) = 0, n \in A\}$ . On voit aisément que  $V$  est fermé, donc réflexif.

De plus on a :

$$V^\perp = \{S \in W^{-m,q}(\mathbb{T}^1) ; C_n(S) = 0, n \in A'\}.$$

En effet, soit  $S \in V^\perp$ ; comme  $e^{2\pi i n t} \in V$  pour tout  $n \in A$ , on obtient :

$$C_n(S) = S(e^{-2\pi i n t}) = 0, \text{ pour tout } n \in A'.$$

Réciproquement, soit  $S \in W^{-m,q}(\mathbb{T}^1)$  telle que  $C_n(S) = 0$  pour chaque  $n \in A'$ .

Le Lemme 1 (b) montre que la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(g) e^{2\pi i n t}$  converge bien dans  $W^{m,p}(\mathbb{T}^1)$

vers  $g$  donc on a :

$$S(g) = \sum_{n \in A'} C_n(g) S(e^{2\pi i n t}) = \sum_{n \in A'} C_n(g) \overline{C_n(S)} = 0.$$

Ainsi que  $S \in V^\perp$ .

On montre maintenant aisement qu'on a aussi :

$$g + V = \left\{ h \in W^{m,p}(\mathbb{T}^1) ; C_n(h) = \gamma_n, n \in A \right\},$$

$$T + V^\perp = \left\{ S \in W^{-m,q}(\mathbb{T}^1) ; C_n(S) = \gamma_n, n \in A' \right\}$$

Soit  $\mathcal{F}$  l'application de dualité de  $W^{m,p}(\mathbb{T}^1)$ .

D'après un résultat de Beurling-Livingston [1] (voir aussi de Figueiredo [3]) l'ensemble  $\mathcal{F}(g + V) \cap (T + V^\perp)$  contient un élément unique  $F$ . Alors  $f = \mathcal{F}^{-1}F$  a toutes les propriétés requises. □

Une application. Dans [6] on montre qu'on peut établir une correspondance biunivoque entre les distributions sur le tore  $\mathbb{T}^1$  et les distributions périodiques sur  $\mathbb{R}$ , de période 1 (ou de période  $2\pi$ ).

Soit  $L_{2\pi}^p = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ } 2\pi\text{-périodique, } f \in L^p[0, 2\pi] \right\}$

muni de la norme  $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p}$ . Soit

$$W_{2\pi}^{m,p} = \left\{ f \in L_{2\pi}^p ; \|f\|_{m,p} = \sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_p < +\infty \right\}.$$

Alors on peut mettre en correspondance les espaces  $W^{m,p}(\mathbb{T}^1)$  et  $W_{2\pi}^{m,p}$  ainsi que leur duals, donc les résultats précédents sont vrais aussi pour les espaces de distributions de Sobolev ( $2\pi$ -périodiques).

Pour  $T \in \mathcal{D}'$   $2\pi$ -périodique on définit :

$$u(r,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(T) r^{|n|} e^{int}, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (4)$$

Alors on sait que la série (4) est uniformément convergente ainsi que toute ses dérivées partielles dans tout disque de rayon  $0 \leq r \leq 1 - \varepsilon$  et représente une fonction harmonique de classe  $C^\infty$  dans  $D = \{(x,y); x^2 + y^2 < 1\}$ . De plus on a :

$$u(r,t) \xrightarrow{r \rightarrow 1-} T \text{ dans } \mathcal{D}'.$$

(voir [7])

Soit maintenant  $1 < p \leq 2$  et  $T \in W_{2\pi}^{-m,q}$  telle que  $\left\{ (1 + in)^{-m} C_n(T) \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l^p(\mathbb{Z})$

(la Proposition 3 (b) certifie que l'ensemble de telles distributions est bien large).

On va prouver que dans cet cas on a le résultat plus précis :

$$u(r,t) \xrightarrow{r \rightarrow 1-} T \text{ dans } W_{2\pi}^{-m,q}. \quad (4)$$

En effet, soit  $f \in W_{2\pi}^{m,p}$  ; alors la Proposition 3 (a) montre que  $\left\{ n^m C_n(f) \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l^q(\mathbb{Z})$ .

Du fait il existe une constante  $M > 0$  telle que :

$$\| \{ C_n(f) \}_n^m \|_{2^q} \leq M, \text{ pour toute } f \in W_{2\pi}^{m,p} \text{ avec } \| f \|_{m,p} \leq 1 \quad (5)$$

En effet, (5) est une conséquence de (2) et de l'estimation :

$$\| \{ C_n(f) \}_n^m \|_{2^q} \leq \| f \|_p, \quad f \in L_{2\pi}^p. \quad (\text{voir [4],[5] ou [8]}).$$

On obtient maintenant aisément :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r,t) f(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(T) C_{-n}(f) r^{|n|} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(T) C_{-n}(f) = T(f).$$

En utilisant (5) on voit que la convergence est uniforme sur la boule unitée de  $W_{2\pi}^{m,p}$ , ainsi que (4) est prouvé.

#### References

1. Beurling A. - Livingston A., A theorem on duality mappings in Banach spaces, Ark.Math.4,1962,405-411.
2. Cioranescu I., Les applications de dualité dans l'analyse fonctionnelle nonlinéaire (en roumain) ,Ed.Acad.1974.
3. De Figueiredo G., Topics in nonlinear functional Analysis,Univ.of Maryland,1967.
4. Edwards R., Fourier Series : A modern Introduction I,II,Springer Verlag,1979/1982.
5. Schmeisser H.J. - Triebel H., Topics in Fourier Analysis and Function Spaces, Leipzig,1984.
6. Schwartz L., Théorie des distributions,vol.I,II,Hermann & Cie.,Paris,1957/1959.
7. Walter W.,Einführung in die Theorie der Distributionen,Hochschultaschenbücher Verlag,R.I.Mannheim,Wien,Zurich,1970.
8. Zygmund A., Trigonometric Series,Cambridge Univ.Press,1959.