

SOLUTIONS PERIODIQUES D'UN SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Ilie Popescu

I. Soit le système canonique

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

un système avec 4 degré de liberté, où les variables y_i sont des variables angulaires et la fonction génératrice F peut être développée en série selon les puissances positives d'un paramètre petit ϵ ,

$$(2) \quad F = F_0 + \epsilon F_1 + \epsilon^2 F_2 + \dots,$$

F_0 étant fonction de x_1 et x_2 seulement et F_1, F_2, \dots fonctions de x_i et y_i , périodiques de période 2π par rapport à y_i .

Pour $\epsilon = 0$, le système s'intègre complètement et admet la solution

$$(3) \quad x_i = a_i, \quad y_i = \eta_i t + \omega_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

où

$$(4) \quad \eta_1 = \frac{\partial F_0}{\partial a_1}, \quad \eta_2 = -\frac{\partial F_0}{\partial a_2}, \quad \eta_3 = \eta_4 = 0.$$

Pour assurer la périodicité du mouvement correspondant, il faut choisir les constants a_1 et a_2 de telle manière que les deux quantités η_1 et η_2 soient commensurables entre elles. La solution ainsi obtenue dépendra de 5 constantes arbitraires $\omega_2, \omega_3, \omega_4, a_3, a_4$, parce qu'on peut choisir l'origine du système ainsi que $\omega_1 = 0$.

Pour $\epsilon \neq 0$, le système canonique (1) admet encore des solutions périodiques, qui pour $\epsilon = 0$ se confondent avec la solution (3) et cela pour les valeurs $\omega_2, \omega_3, \omega_4, a_3, a_4$ qui vérifient le système:

$$(5) \quad \frac{\partial R}{\partial a_3} = \frac{\partial R}{\partial a_4} = \frac{\partial R}{\partial \omega_2} = \frac{\partial R}{\partial \omega_3} = \frac{\partial R}{\partial \omega_4},$$

où R est la valeur moyenne de la fonction perturbatrice F_1 pendant une période.

Ces considérations ont une application immédiate à la recherche des solutions périodiques de la troisième catégorie dans la problème des trois corps [1], [2], [3].

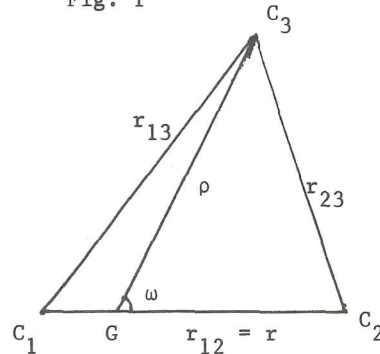
II. Soient C_1, C_2, C_3 trois corps de masses m_1, m_2, m_3 . Considérons le mouvement du corps C_2 par rapport à un système d'axes parallèle avec le système absolu de référence et avec l'origine dans le corps C_1 et d'autre part, le mouvement du corps C_3 par rapport à un système d'axes parallèle avec le système fondamental et avec l'origine dans le centre de poids des corps C_1 et C_2 .

Supposons que les deux mouvements sont elliptiques et soient $2a, e, \ell, g, 2a', e', \ell', g'$ les grandes axes, les excentricités, les anomalies moyennes, respectivement les longitudes des périhélie des deux orbites.

Notons:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = K(m_1+m_2), \quad \mu' = K(m_1+m_2+m_3), \\ m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}, \quad m' = \frac{m_3(m_1+m_2)}{m_1+m_2+m_3}, \\ L = \sqrt{\mu a}, \quad L' = \sqrt{\mu' a'}, \\ G = L\sqrt{1-e^2}, \quad G' = L'\sqrt{1-e'^2}, \\ \theta = G \cos i, \quad \theta' = G' \cos i', \end{array} \right.$$

Fig. 1



où K est la constante de l'attraction universelle et i et i' sont les inclinaisons des deux orbites envers le plan invariable de référence.

Considérons le hamiltonien H de la forme

$$H = \frac{m\mu}{2L^2} + \frac{m'\mu'}{2L'^2} + Km_3 \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1+m_2}{\rho} \right),$$

où r_{13}, r_{23} et ρ sont les distances indiquées dans la figure 1.

Les équations générales du mouvement des trois corps, en partant de la fonction génératrice H , les variables mL , mG , $m'L'$, $m'G'$, $m\theta$, $m'\theta'$ et les six variables conjuguées l , g , l' , g' , θ , θ' sont:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (mL) = \frac{\partial H}{\partial l}, & \frac{d}{dt} (mG) = \frac{\partial H}{\partial g}, & \frac{d}{dt} (m\theta) = \frac{\partial H}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt} (m'L') = \frac{\partial H}{\partial l'}, & \frac{d}{dt} (m'G') = \frac{\partial H}{\partial g'}, & \frac{d}{dt} (m'\theta') = \frac{\partial H}{\partial \theta'}, \\ \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial (mL)}, & \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial (mG)}, & \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial (m\theta)}, \\ \frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial (m'L')}, & \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial (m'G')}, & \frac{d\theta'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial (m'\theta')}, \end{cases}$$

θ et θ' étant les longitudes des noeuds ascendants.

En notant avec $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ le vecteur des aires, les trois intégrales premières correspondants s'obtiennent en projetant sur le système de référence la relation vectorielle

$$\vec{V}(V_x, V_y, V_z) = m\vec{C}_1\vec{C}_2 \cdot \frac{d}{dt} (\vec{C}_1\vec{C}_2) + m'G\vec{C}_3 \cdot \frac{d}{dt} (\vec{C}\vec{C}_3),$$

et on obtient

$$\begin{aligned} V_x &= mG \sin i \sin \theta + m'G' \sin i' \sin \theta', \\ V_y &= mG \sin i \cos \theta + m'G' \sin i' \cos \theta', \\ V_z &= mG \cos i + m'G' \cos i'. \end{aligned}$$

Si on choisit le système de référence tel que l'axe O_z soit parallèle avec la direction des aires, on obtient

$$(7) \quad \begin{cases} mG \sin i \sin \theta + m'G' \sin i' \sin \theta' = 0, \\ mG \sin i \cos \theta + m'G' \sin i' \cos \theta' = 0, \\ mG \cos i + m'G' \cos i' = V_z. \end{cases}$$

Les deux premières équations sont linéaires et homogènes par rapport aux variables $mG \sin i$ et $m'G' \sin i'$, qui ne sont pas nulles. Il en résulte que $\sin(\theta - \theta') = 0$ et parce que i et i' sont positifs on retient la solution $\theta' - \theta = \pi$.

Dans ce cas, les trois intégrales premières des aires deviennent

$$\begin{cases} \theta' - \theta = \pi, \\ mG \sin i - m'G' \sin i' = 0, \\ m\theta + m'\theta' = V_z. \end{cases}$$

En utilisant ces relations on conclut que H ne dépend pas explicitement des variables θ , θ' , $m\theta$ et $m'\theta'$ et si on remplace en H , $\theta' - \theta$ par π et $m\theta + m'\theta'$ par V_z , le système (6) se réduit à un système d'ordres 8:

$$\begin{aligned} \frac{d(mL)}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial l}, & \frac{d(mG)}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial g}, & \frac{d(m'L')}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial l'}, & \frac{d(m'G')}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial g'}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial(mL)}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial(mG)}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial(m'L')}, & \frac{dg'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial(m'G')}. \end{aligned}$$

En intégrant le système (8) on obtient les variables mL , mG , $m'L'$, $m'G'$, l , g , l' , g' en fonction de t et des relations (7) on déduit aussi les variables $m\theta$, $m'\theta'$, θ et θ' .

Pour l'intégration du système (8) on appliquera les considérations ci-dessus exposées.

Supposons que le masse m_1 du corps C_1 est finie et que les masses m_2 et m_3 des corps C_2 et C_3 sont petites. Alors les quantités m et m' , les quatre variables mL , $m'L'$, mG , $m'G'$ et la fonction génératrice H seront elles aussi petites pour des valeurs arbitraires des huit éléments L , G , L' , G' , l , g , l' , g' .

On introduira un paramètre petit et positif, ϵ , ainsi que

$$(9) \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \epsilon M, \quad m' = \frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} = \epsilon M',$$

M et M' étant des quantités finies, et on va considérer le paramètre ϵ

variable qui tend vers zero.

Des relations (9) on obtient

$$(10) \quad m_2 = \frac{\varepsilon m_1 M}{m_1 - \varepsilon M}, \quad m_3 = \frac{\varepsilon m_1^2 M'}{m_1 - \varepsilon m_1 M' + \varepsilon^2 M M'}$$

ce qui nous montre que les masses m_2, m_3 sont les fonctions de ε , holomorphes et nulles pour $\varepsilon = 0$.

En tenant compte des notations (9) les deux premières termes de la fonction génératrice H deviennent

$$\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{M\mu^2}{L^2} + \frac{M'\mu'^2}{L'^2} \right)$$

et donnent le premier terme du développement de H en série, suivant les puissances entières et positives de ε .

Le troisième terme de la fonction H ,

$$K_{m_3} \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1 + m_2}{\rho} \right)$$

s'appelle la fonction perturbatrice ordinaire des deux mouvements considérés et contient le paramètre ε en facteur. Donc, la fonction génératrice H contient la paramètre ε en facteur.

En utilisant les relations (10) on obtient:

$$(11) \quad \mu = \frac{K_1^2}{m_1 - \varepsilon M}; \quad \mu' = \frac{K_{m_1}^4}{(m_1 - \varepsilon M)(m_1 - \varepsilon m_1 M' + \varepsilon^2 M M')}$$

qui pour $\varepsilon = 0$ deviennent

$$(12) \quad \mu = \mu' = K_{m_1}.$$

Le système canonique (8) qui a la fonction génératrice H , peut être remplacé par un autre système canonique, de fonction génératrice F , où

$$(13) \quad F = \frac{H}{\epsilon} = \frac{M\mu^2}{2L^2} + \frac{M'\mu'^2}{2L'^2} + \frac{Km_3}{\epsilon} \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1+m_2}{\rho} \right).$$

En notant

$$(14) \quad \frac{mL}{\epsilon} = \Lambda, \quad \frac{mG}{\epsilon} = H, \quad \frac{m'L'}{\epsilon} = \Lambda', \quad \frac{m'G'}{\epsilon} = H',$$

le système (8) devient

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}, & \frac{dH}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{d\Lambda'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \lambda'}, & \frac{dH'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g'}, \\ \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \Lambda}, & \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H}, & \frac{d\lambda'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \Lambda'}, & \frac{dg'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H'} \end{cases}$$

et la fonction génératrice F a la forme

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{M^3 \mu^2}{\Lambda^2} + \frac{M'{}^3 \mu'^2}{\Lambda'^2} \right) + \frac{Km_3}{\epsilon} \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1+m_2}{\rho} \right).$$

F étant holomorphe, on peut la développer en série suivant les puissances entières et positives de ϵ , pour les valeurs de ϵ suffisamment petits:

$$(16) \quad F = F_0 + \epsilon F_1 + \epsilon^2 F_2 + \dots$$

III. Dans la théorie de Poincaré concernant les solutions périodiques d'un système d'équations différentielles n'interviennent que F_0 et F_1 , où

$$(17) \quad F_0 = \frac{K^2 m_1^2}{2} \left(\frac{M^3}{\Lambda^2} + \frac{M'{}^3}{\Lambda'^2} \right).$$

L'expression analytique de la fonction perturbatrice F_1 s'obtient de la relation

$$(18) \quad F_1 = \left. \frac{dF}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

En utilisant la théorie du centre de gravité et en exprimant les distances r_{13} et r_{23} en fonction de r , ρ , ω et les masses m_1 , m_2 , m_3 des trois

corps, on aura

$$F_1 = \frac{M}{2A} \frac{d\mu}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{M'}{2a'} \frac{d\mu'}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + K \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{m_3}{\varepsilon} \right) \left(\frac{m_1}{r_{13}} + \frac{m_2}{r_{23}} - \frac{m_1+m_2}{\rho} \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ + \frac{Km_3}{\varepsilon} \left[m_1 \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{1}{r_{13}} \right) + \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{m_2}{r_{23}} \right) - \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{m_1+m_2}{\rho} \right) \right] \Big|_{\varepsilon=0},$$

et après avoir fait les calculs on obtient

$$(19) \quad F_1 = K \left[\frac{M^2}{2a} + \frac{M'(M+M')}{2a'} + MM' \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+r^2-2r\rho \cos \omega}} - \frac{r \cos \omega}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \right) \right],$$

où

$$(20) \quad \cos \omega = \cos(g+v)\cos(g'+v') + \sin(g+v)\sin(g'+v')\cos(i+i'),$$

v et v' étant les anomalies vraies des deux mouvements.

Si dans le système (15) on se limite aux deux premiers termes du développement en série de la fonction génératrice F , on obtient les expressions analytiques des fonctions de la partie droite:

$$\frac{\partial F}{\partial \ell} = \varepsilon \left\{ \frac{KMM'}{rA} [a^2 \rho \sqrt{1-e^2} (-\sin(g+v)\cos(g'+v') + \cos(g+v)\sin(g'+v')\cos(i+i')) \right. \\ \left. - (r-\rho \cos \omega) a^2 e \sin u] - \frac{a^2 e \sin u \cos \omega}{\rho^2} \right\},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \ell'} = \varepsilon \left\{ \frac{KMM'}{A} [a'^2 r \sqrt{1-e'^2} (-\cos(g+v)\sin(g'+v') + \sin(g+v)\cos(g'+v')\cos(i+i')) \right. \\ \left. - (r-\rho \cos \omega) a'^2 e' \sin u'] - \frac{a'^2 e' \sin u' (\rho+2r \cos \omega)}{\rho^3} \right\},$$

$$\frac{\partial F}{\partial g} = \varepsilon \frac{KMM'r\rho}{A} [-\sin(g+v)\cos(g'+v') + \cos(g+v)\sin(g'+v')\cos(i+i')],$$

$$\frac{\partial F}{\partial g'} = \varepsilon \frac{KMM'r\rho}{A} [-\cos(g+v)\sin(g'+v') + \sin(g+v)\cos(g'+v')\cos(i+i')],$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Lambda} = -K^2 \frac{m_1^2}{\Lambda} \frac{M^3}{2} - \varepsilon \frac{KaMM'}{A} (r-\rho \cos \omega) \cos u \frac{H}{\Lambda \sqrt{\Lambda^2 - H^2}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Lambda'} = -K^2 \frac{m_1^2}{\Lambda'} \frac{M'^3}{2} + \varepsilon Ka'MM' \left(\frac{-r+\rho \cos \omega}{A} + \frac{2r \cos \omega + 1}{\rho^2} \right) \frac{H' \cos u'}{\Lambda' \sqrt{\Lambda'^2 - H'^2}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial H} = -\varepsilon \frac{KaMM'}{A} (r-\rho \cos \omega) \cos u \frac{H}{\sqrt{\Lambda^2 - H^2}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial H'} = \varepsilon Ka'MM' \left(\frac{-r+\rho \cos \omega}{A} + \frac{2r \cos \omega + 1}{\rho^2} \right) \frac{H' \cos u'}{\sqrt{\Lambda'^2 - H'^2}}$$

où on a noté $A = (\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \omega)^{3/2}$, u et u' étant les anomalies excentriques des deux mouvements.

Le système d'équations (15) a les fonctions de la partie droite bien déterminées, dépendant de t , des huit variables canoniques $\Lambda, \Lambda', H, H', \ell, \ell', g, g'$ et du paramètre ε .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Chazy, J., *Mécanique Céleste*, Paris, 1953.
- [2] Grémillard, J., "Recherches sur les solutions périodiques de la troisième sorte dans le problème des trois corps," Bull. Astronomique t. XXII, 1958.
- [3] Duboshin, G. N., *Celestial Mechanics*, (Basic Problems and Methods) (Russian), Moscow, 1968.